Quelques aspects de la géométrie des espaces Lipschitz-libres

Colin PETITJEAN

École doctorale Carnot – Pasteur
Besançon, 19 juin 2018

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

- $\mathrm{Lip}_0(M, X) = \{f : M \to X \text{ Lipschitz} : f(0) = 0\}$

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

- $\mathrm{Lip}_0(M, X) = \{f : M \to X \text{ Lipschitz} : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_X}{d(x, y)}$.

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

- $\mathrm{Lip}_0(M, X) = \{f : M \to X \text{ Lipschitz} : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_X}{d(x, y)}.$

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, X), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

- $\mathrm{Lip}_0(M, X) = \{f : M \to X \text{ Lipschitz} : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_X}{d(x, y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, X), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Lorsque $X = \mathbb{R}$, on note simplement $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

- $\mathrm{Lip}_0(M, X) = \{f : M \to X \text{ Lipschitz} : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_X}{d(x, y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, X), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Lorsque $X = \mathbb{R}$, on note simplement $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Pour $x \in M$, on définit $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_0(M)^*$ par $\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$.

Soit (M,d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

- $\mathrm{Lip}_0(M,X) = \{f : M \to X \text{ Lipschitz} : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x)-f(y)\|_X}{d(x,y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M,X), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Lorsque $X = \mathbb{R}$, on note simplement $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Pour $x \in M$, on définit $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_0(M)^*$ par $\langle \delta(x), f\rangle = f(x)$.

Définition (Espace Lispchitz-libre)

L'espace Lipschitz-libre sur M est défini par :
$\mathcal{F}(M) := \overline{\mathrm{vect}\,\{\delta(x)\,;\, x \in M\}}^{\|\cdot\|} \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$.

Soit (M, d) un espace métrique équipé d'un point distingué noté 0.
Pour un espace de Banach réel X, on considère :

- $\mathrm{Lip}_0(M, X) = \{f : M \to X \text{ Lipschitz} : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_X}{d(x, y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, X), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Lorsque $X = \mathbb{R}$, on note simplement $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Pour $x \in M$, on définit $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_0(M)^*$ par $\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$.

Définition (Espace Lispchitz-libre)

L'espace Lipschitz-libre sur M est défini par :
$\mathcal{F}(M) := \overline{\mathrm{vect}\,\{\delta(x)\,;\, x \in M\}}^{\|\cdot\|} \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$.

Remarque

L'application $\delta : x \in M \mapsto \delta(x) \in \mathcal{F}(M)$ est une isométrie.

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

L'espace libre $\mathcal{F}(M)$ possède la propriété suivante :
$\forall X$ *Banach*, $\forall f : M \to X$ *Lipschitz*, $\exists! \, \overline{f} : \mathcal{F}(M) \to X$ *vérifiant* $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)} = \|f\|_L$ *et tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta_M"'] & X \\ \mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

L'application $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X) \mapsto \overline{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ *est une isométrie linéaire surjective :* $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$.

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

L'espace libre $\mathcal{F}(M)$ possède la propriété suivante :
$\forall X$ Banach, $\forall f : M \to X$ Lipschitz, $\exists! \overline{f} : \mathcal{F}(M) \to X$ vérifiant $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)} = \|f\|_L$ et tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta_M"'] & X \\ \mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

L'application $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X) \mapsto \overline{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ est une isométrie linéaire surjective : $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$.

Remarque : Pour $X = \mathbb{R}$, on obtient : $\mathcal{F}(M)^* \equiv \mathrm{Lip}_0(M)$.

Corollaire

- *Si $N \subset M$, alors $\mathcal{F}(N)$ est isométrique à un sous espace de $\mathcal{F}(M)$.*

Corollaire

- *Si* $N \subset M$*, alors* $\mathcal{F}(N)$ *est isométrique à un sous espace de* $\mathcal{F}(M)$*.*
- *Si* $N \overset{Lip.}{\hookrightarrow} M$*, alors* $\mathcal{F}(N) \overset{lin.}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(M)$*.*

Corollaire

- *Si* $N \subset M$*, alors* $\mathcal{F}(N)$ *est isométrique à un sous espace de* $\mathcal{F}(M)$*.*
- *Si* $N \overset{Lip.}{\hookrightarrow} M$*, alors* $\mathcal{F}(N) \overset{lin.}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(M)$*.*

Exemples

1. $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \equiv \ell_1$

Corollaire

- *Si* $N \subset M$, *alors* $\mathcal{F}(N)$ *est isométrique à un sous espace de* $\mathcal{F}(M)$.
- *Si* $N \overset{Lip.}{\hookrightarrow} M$, *alors* $\mathcal{F}(N) \overset{lin.}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(M)$.

Exemples

1. $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \equiv \ell_1$
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L_1(\mathbb{R})$

Corollaire

- *Si* $N \subset M$*, alors* $\mathcal{F}(N)$ *est isométrique à un sous espace de* $\mathcal{F}(M)$*.*
- *Si* $N \overset{Lip.}{\hookrightarrow} M$*, alors* $\mathcal{F}(N) \overset{lin.}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(M)$*.*

Exemples

1. $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \equiv \ell_1$
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L_1(\mathbb{R})$

Remarque

Pour un espace métrique M, on note $\tilde{M}$ son complété.

Corollaire

- *Si $N \subset M$, alors $\mathcal{F}(N)$ est isométrique à un sous espace de $\mathcal{F}(M)$.*
- *Si $N \overset{Lip.}{\hookrightarrow} M$, alors $\mathcal{F}(N) \overset{lin.}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(M)$.*

Exemples

1. $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \equiv \ell_1$
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L_1(\mathbb{R})$

Remarque

Pour un espace métrique M, on note $\tilde{M}$ son complété.
Alors $\mathcal{F}(M)$ et $\mathcal{F}(\tilde{M})$ sont linéairement isométriques.

Corollaire

- *Si $N \subset M$, alors $\mathcal{F}(N)$ est isométrique à un sous espace de $\mathcal{F}(M)$.*
- *Si $N \overset{Lip.}{\hookrightarrow} M$, alors $\mathcal{F}(N) \overset{lin.}{\hookrightarrow} \mathcal{F}(M)$.*

Exemples

1. $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \equiv \ell_1$
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L_1(\mathbb{R})$

Remarque

Pour un espace métrique M, on note $\tilde{M}$ son complété.
Alors $\mathcal{F}(M)$ et $\mathcal{F}(\tilde{M})$ sont linéairement isométriques.
$\rightarrow$ On considérera toujours des espaces métriques complets, même lorsque cela n'est pas mentionné explicitement !

Motivation :

Motivation :

- Outil intéressant pour étudier la classification non linéaire des espaces de Banach.

Motivation :

- Outil intéressant pour étudier la classification non linéaire des espaces de Banach.
  $\rightarrow$ Théorème [Godefroy - Kalton '03] : Soit X un Banach séparable. Si X se plonge isométriquement dans Y, alors X se plonge également linéairement isométriquement dans Y.

Motivation :

- Outil intéressant pour étudier la classification non linéaire des espaces de Banach.
  $\rightarrow$ Théorème [Godefroy - Kalton '03] : Soit X un Banach séparable. Si X se plonge isométriquement dans Y, alors X se plonge également linéairement isométriquement dans Y.
- La propriété de linéarisation crée des liens entre certains problèmes classiques de géométrie des Banach et certains problèmes ouverts sur les espaces libres.

Motivation :

- Outil intéressant pour étudier la classification non linéaire des espaces de Banach.
  $\rightarrow$ Théorème [Godefroy - Kalton '03] : Soit X un Banach séparable. Si X se plonge isométriquement dans Y, alors X se plonge également linéairement isométriquement dans Y.
- La propriété de linéarisation crée des liens entre certains problèmes classiques de géométrie des Banach et certains problèmes ouverts sur les espaces libres.
  Exemple : $\mathcal{F}(\ell_1)$ complémenté dans son bidual ? Si oui, alors

$$[X \underset{Lip}{\simeq} \ell_1] \implies [X \underset{lin}{\simeq} \ell_1].$$

Motivation :

- Outil intéressant pour étudier la classification non linéaire des espaces de Banach.
  $\rightarrow$ Théorème [Godefroy - Kalton '03] : Soit X un Banach séparable. Si X se plonge isométriquement dans Y, alors X se plonge également linéairement isométriquement dans Y.
- La propriété de linéarisation crée des liens entre certains problèmes classiques de géométrie des Banach et certains problèmes ouverts sur les espaces libres.
  Exemple : $\mathcal{F}(\ell_1)$ complémenté dans son bidual ? Si oui, alors

$$[X \underset{Lip}{\simeq} \ell_1] \implies [X \underset{lin}{\simeq} \ell_1].$$

Programme de Godefroy et Kalton :

Étudier le comportement, c'est à dire la structure linéaire et la géométrie de $\mathcal{F}(M)$ pour différents espaces métriques M.

Définition

On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Schur si :
$\forall (x_n)_n \subset X,\ x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\omega}{\longrightarrow}} 0 \implies \|x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Définition

On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Schur si :
$\forall (x_n)_n \subset X,\ x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\omega}{\longrightarrow}} 0 \implies \|x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exemples

1. ℓ_1 a la propriété de Schur (bosse glissante).

Définition

On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Schur si :
$\forall (x_n)_n \subset X,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} 0 \implies \|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Exemples

1. ℓ_1 a la propriété de Schur (bosse glissante).
2. Les espaces réflexifs de dimension infinie n'ont pas cette propriété.

Résultats dans la littérature

Résultats dans la littérature

1. [Kalton, '04] : On considère (M, d^p) où (M, d) est un espace métrique et $0 < p < 1$). Alors $\mathcal{F}(M, d^p)$ a la propriété de Schur.

Résultats dans la littérature

1. [Kalton, '04] : On considère (M, d^p) où (M, d) est un espace métrique et $0 < p < 1$). Alors $\mathcal{F}(M, d^p)$ a la propriété de Schur.
2. [Hájek-Lancien-Pernecká, '16] : Soit M un espace métrique propre (les boules fermées sont compactes) et dénombrable.
   Alors $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Résultats dans la littérature

1. [Kalton, '04] : On considère (M, d^p) où (M, d) est un espace métrique et $0 < p < 1$). Alors $\mathcal{F}(M, d^p)$ a la propriété de Schur.
2. [Hájek-Lancien-Pernecká, '16] : Soit M un espace métrique propre (les boules fermées sont compactes) et dénombrable.
   Alors $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Espaces de fonctions petit-Lipschitz

On considère deux sous espaces fermés de $\mathrm{Lip}_0(M)$ ($\sup \emptyset = 0$) :

On considère deux sous espaces fermés de $\mathrm{Lip}_0(M)$ ($\sup \emptyset = 0$) :

$$lip_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < d(x,y) < \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\},$$

On considère deux sous espaces fermés de $\mathrm{Lip}_0(M)$ ($\sup \emptyset = 0$) :

$$lip_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < d(x,y) < \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\},$$

$$S_0(M) := \left\{ f \in lip_0(M) : \lim_{r \to \infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin B(\mathbf{0}, r) \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

On considère deux sous espaces fermés de $\mathrm{Lip}_0(M)$ ($\sup \emptyset = 0$) :

$$lip_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < d(x,y) < \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\},$$

$$S_0(M) := \left\{ f \in lip_0(M) : \lim_{r \to \infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin B(0,r) \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

Définition

On dit que $S \subseteq Lip_0(M)$ sépare les points uniformément (S.P.U.) si :
$\exists c \geq 1$ tel que $\forall x \neq y \in M$, $\exists f \in S$ avec $\|f\|_L \leq c$ et $|f(x) - f(y)| = d(x,y)$.

On considère deux sous espaces fermés de $\mathrm{Lip}_0(M)$ ($\sup \emptyset = 0$) :

$$lip_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < d(x,y) < \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\},$$

$$S_0(M) := \left\{ f \in lip_0(M) : \lim_{r \to \infty} \sup_{\substack{x \text{ ou } y \notin B(0,r) \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

Définition

On dit que $S \subseteq Lip_0(M)$ sépare les points uniformément (S.P.U.) si :
$\exists c \geq 1$ tel que $\forall x \neq y \in M$, $\exists f \in S$ avec $\|f\|_L \leq c$ et $|f(x) - f(y)| = d(x,y)$.

(Kalton '04) : $S = lip_0(M)$ (ou $S_0(M)$) S.P.U. si et seulement si S est C-normant pour $\mathcal{F}(M)$, c'est à dire :

$$\forall \gamma \in \mathcal{F}(M),\ \|\gamma\| \leq C \sup_{f \in B_S} |\langle f, \gamma \rangle|.$$

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Exemples

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Exemples

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. M uniformément discret ($\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \neq y$, $d(x,y) > \delta > 0$).

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Exemples

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. M uniformément discret ($\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \neq y$, $d(x,y) > \delta > 0$).
2. L'ensemble triadique de Cantor [Weaver '99].

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Exemples

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. M uniformément discret ($\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \neq y$, $d(x, y) > \delta > 0$).
2. L'ensemble triadique de Cantor [Weaver '99].
3. (M, d^p) avec $p \in]0, 1[$ [Kalton '04].

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Exemples

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. M uniformément discret ($\exists\delta > 0$ tel que $\forall x \neq y$, $d(x,y) > \delta > 0$).
2. L'ensemble triadique de Cantor [Weaver '99].
3. (M, d^p) avec $p \in]0,1[$ [Kalton '04].
4. "Petits ensembles de Cantor" [Godefroy '14].

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Exemples

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. M uniformément discret ($\exists \delta > 0$ tel que $\forall\, x \neq y$, $d(x,y) > \delta > 0$).
2. L'ensemble triadique de Cantor [Weaver '99].
3. (M, d^p) avec $p \in]0,1[$ [Kalton '04].
4. "Petits ensembles de Cantor" [Godefroy '14].
5. M propre et dénombrable [Dalet '15].

Proposition (P. '17)

$lip_0(M)$ est 1-normant $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur.

Exemples

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. M uniformément discret ($\exists \delta > 0$ tel que $\forall\, x \neq y$, $d(x,y) > \delta > 0$).
2. L'ensemble triadique de Cantor [Weaver '99].
3. (M, d^p) avec $p \in]0,1[$ [Kalton '04].
4. "Petits ensembles de Cantor" [Godefroy '14].
5. M propre et dénombrable [Dalet '15].
6. $M = (X, \|\cdot\|^p)$ ou X est un p-Banach avec une FDD monotone [P. '17].

(Dalet '15) : Soit (M, d) un espace métrique propre, alors

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

(Dalet '15) : Soit (M, d) un espace métrique propre, alors

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Proposition (P. '17)

$S_0(M)$ S.P.U. + M propre $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur forte.

(Dalet '15) : Soit (M,d) un espace métrique propre, alors

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Proposition (P. '17)

$S_0(M)$ S.P.U. + M propre $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur forte.

Proposition (Caractérisation de la propriété de Schur)

Un Banach X a la propriété de Schur si et seulement si :
$\forall \delta \in (0,2)$, $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ suite δ-écartée, $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ_1 : $\exists K = K(x_n,\delta) > 0$ tel que :

$$\forall\,(a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n\ :\ \frac{1}{K}\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_{n_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

(Dalet '15) : Soit (M,d) un espace métrique propre, alors

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Proposition (P. '17)

$S_0(M)$ S.P.U. + M propre $\implies$ $\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Schur forte.

Proposition (Caractérisation de la propriété de Schur)

Un Banach X a la propriété de Schur si et seulement si :
$\forall \delta \in (0,2)$, $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ suite δ-écartée, $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ_1 : $\exists K = K(x_n,\delta) > 0$ tel que :

$$\forall\,(a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \;:\; \frac{1}{K}\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_{n_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Schur forte : $K(x_n,\delta) \longleftrightarrow \frac{K}{\delta}$ avec K indépendant de la suite.

Théorème (P. '17)

$S_0(M)$ *S.P.U.* + M *est propre* + $\mathcal{F}(M)$ *a* (*AP*)

Théorème (P. '17)

$S_0(M)$ *S.P.U.* + M *est propre* + $\mathcal{F}(M)$ *a (AP)*

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{F}(M) \underset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \Big(\sum_n E_n\Big)_{\ell_1},\ E_n \subset \mathcal{F}(M) \text{ avec } \dim(E_n) < \infty.$$

Théorème (P. '17)

$S_0(M)$ S.P.U. + M est propre + $\mathcal{F}(M)$ a (AP)

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{F}(M) \underset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \Big(\sum_n E_n\Big)_{\ell_1},\ E_n \subset \mathcal{F}(M) \text{ avec } \dim(E_n) < \infty.$$

[Godefroy-Kalton-Li '96] : Soit V un sous espace de c_0 ayant (MAP). Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$V^* \underset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \Big(\sum_n F_n\Big)_{\ell_1},\ F_n \subset V^* \text{ avec } \dim(F_n) < \infty.$$

Théorème (P. '17)

$S_0(M)$ *S.P.U.* + M *est propre* + $\mathcal{F}(M)$ *a* (AP)

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{F}(M) \underset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \Big(\sum_n E_n\Big)_{\ell_1}, \; E_n \subset \mathcal{F}(M) \text{ avec } \dim(E_n) < \infty.$$

[Godefroy-Kalton-Li '96] : Soit V un sous espace de c_0 ayant (MAP). Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$V^* \underset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \Big(\sum_n F_n\Big)_{\ell_1}, \; F_n \subset V^* \text{ avec } \dim(F_n) < \infty.$$

[Kalton '04 / Dalet '15] : Si M est un espace métrique propre, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \; S_0(M) \underset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} c_0.$$

Exemples ((AP) or not ?)

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

Exemples ((AP) or not ?)

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. Les espaces métrique uniformément discrets et propres, par exemple $M = (\mathbb{Z}^d, \|\cdot\|_1)$, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP).

Exemples ((AP) or not ?)

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. Les espaces métrique uniformément discrets et propres, par exemple $M = (\mathbb{Z}^d, \|\cdot\|_1)$, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP).
2. L'ensemble triadique de Cantor, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Weaver '99]

Exemples ((AP) or not ?)

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. Les espaces métrique uniformément discrets et propres, par exemple $M = (\mathbb{Z}^d, \|\cdot\|_1)$, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP).
2. L'ensemble triadique de Cantor, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Weaver '99]
3. (M, d^p) avec $p \in]0,1[$, ? ? ? [Kalton '04]

Exemples ((AP) or not ?)

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. Les espaces métrique uniformément discrets et propres, par exemple $M = (\mathbb{Z}^d, \|\cdot\|_1)$, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP).
2. L'ensemble triadique de Cantor, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Weaver '99]
3. (M, d^p) avec $p \in]0, 1[$, ? ? ? [Kalton '04]
4. "Petits ensembles de Cantor", $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Godefroy '14]

Exemples ((AP) or not ?)

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. Les espaces métrique uniformément discrets et propres, par exemple $M = (\mathbb{Z}^d, \|\cdot\|_1)$, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP).
2. L'ensemble triadique de Cantor, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Weaver '99]
3. (M, d^p) avec $p \in]0,1[$, ? ? ? [Kalton '04]
4. "Petits ensembles de Cantor", $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Godefroy '14]
5. M propre et dénombrable, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Dalet '15]

Exemples ((AP) or not ?)

Pour M comme suit, $lip_0(M)/S_0(M)$ est 1-normant :

1. Les espaces métrique uniformément discrets et propres, par exemple $M = (\mathbb{Z}^d, \| \cdot \|_1)$, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP).
2. L'ensemble triadique de Cantor, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Weaver '99]
3. (M, d^p) avec $p \in]0, 1[$, ? ? ? [Kalton '04]
4. "Petits ensembles de Cantor", $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Godefroy '14]
5. M propre et dénombrable, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [Dalet '15]
6. $M = (X, \| \cdot \|^p)$ ou X est un p-Banach de dimension finie, $\mathcal{F}(M)$ a (MAP). [P. '17]

Théorème (Rappel)

1. *[Weaver '99] : Soit (K,d) un espace métrique compact, alors*
$$lip_0(K) \text{ S.P.U.} \iff lip_0(K)^* \equiv \mathcal{F}(K).$$
2. *[Dalet '15] : Soit (M,d) un espace métrique propre, alors*
$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Théorème (Rappel)

1. *[Weaver '99] : Soit (K,d) un espace métrique compact, alors*

$$lip_0(K) \text{ S.P.U.} \iff lip_0(K)^* \equiv \mathcal{F}(K).$$

2. *[Dalet '15] : Soit (M,d) un espace métrique propre, alors*

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

Théorème (Rappel)

1. *[Weaver '99] : Soit (K,d) un espace métrique compact, alors*

$$lip_0(K) \text{ S.P.U.} \iff lip_0(K)^* \equiv \mathcal{F}(K).$$

2. *[Dalet '15] : Soit (M,d) un espace métrique propre, alors*

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. *(M,τ) est compact*

Théorème (Rappel)

1. *[Weaver '99] : Soit (K, d) un espace métrique compact, alors*

$$lip_0(K) \text{ S.P.U.} \iff lip_0(K)^* \equiv \mathcal{F}(K).$$

2. *[Dalet '15] : Soit (M, d) un espace métrique propre, alors*

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. *(M, τ) est compact*
2. *$X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ est 1-normant.*

Théorème (Rappel)

1. *[Weaver '99] : Soit (K, d) un espace métrique compact, alors*

$$lip_0(K) \text{ S.P.U.} \iff lip_0(K)^* \equiv \mathcal{F}(K).$$

2. *[Dalet '15] : Soit (M, d) un espace métrique propre, alors*

$$S_0(M) \text{ S.P.U.} \iff S_0(M)^* \equiv \mathcal{F}(M).$$

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. (M, τ) *est compact*
2. $X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ *est* 1*-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$*.*

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. (M, τ) *est compact*
2. $X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ *est* 1*-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. *(M, τ) est compact*
2. *$X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ est 1-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. *(M,τ) est compact*
2. *$X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M,\tau)$ est 1-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*

Théorème (Kalton ‘04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. (M,τ) *est compact*
2. $X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M,\tau)$ *est* 1*-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. ‘18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. *(M,τ) est compact*
2. *$X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M,\tau)$ est 1-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M,\tau)$ S.P.U.*

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. *(M, τ) est compact*
2. *$X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ est 1-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M, \tau)$ S.P.U.*

Alors $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Théorème (Kalton '04)

Soit M un espace métrique, séparable et borné. Soit τ une topologie métrisable telle que :

1. *(M, τ) est compact*
2. *$X = \mathrm{lip}_0(M) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ est 1-normant.*

Alors, $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M, \tau)$ S.P.U.*

Alors $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$. De plus $\delta(B(0, r))$ préfaiblement fermé dans $\mathcal{F}(M)$ pour tout $r \geq 0$. On dit que X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M, \tau)$ S.P.U.*

Alors $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$. De plus $\delta(B(0,r))$ préfaiblement fermé dans $\mathcal{F}(M)$ pour tout $r \geq 0$. On dit que X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M, \tau)$ S.P.U.*

Alors $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$. De plus $\delta(B(0,r))$ préfaiblement fermé dans $\mathcal{F}(M)$ pour tout $r \geq 0$. On dit que X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$.

Ingrédient principal de la preuve :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M, \tau)$ S.P.U.*

Alors $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$. De plus $\delta(B(0,r))$ préfaiblement fermé dans $\mathcal{F}(M)$ pour tout $r \geq 0$. On dit que X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$.

Ingrédient principal de la preuve :

Théorème (Petunīn–Plīčko '74)

Soit Y un Banach séparable et X un sous-espace fermé de Y^*. Alors, $X^* \equiv Y$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M,\tau)$ S.P.U.*

Alors $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$. De plus $\delta(B(0,r))$ préfaiblement fermé dans $\mathcal{F}(M)$ pour tout $r \geq 0$. On dit que X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$.

Ingrédient principal de la preuve :

Théorème (Petunīn–Plīčko '74)

Soit Y un Banach séparable et X un sous-espace fermé de Y^*. Alors, $X^* \equiv Y$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. *X est composé de fonctions qui atteignent leur norme :*

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable et τ une topologie sur M telle que :

1. *M est τ-propre : les boules fermées pour d sont τ-compactes.*
2. *d est τ semi-continue inférieurement*
3. *$X = S_0(M) \cap \mathcal{C}_b(M,\tau)$ S.P.U.*

Alors $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$. De plus $\delta(B(0,r))$ préfaiblement fermé dans $\mathcal{F}(M)$ pour tout $r \geq 0$. On dit que X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$.

Ingrédient principal de la preuve :

Théorème (Petunīn–Plīčko '74)

Soit Y un Banach séparable et X un sous-espace fermé de Y^*. Alors, $X^* \equiv Y$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. *X est composé de fonctions qui atteignent leur norme :*
   $\forall x^* \in X, \exists y \in S_Y$ *tel que* $\langle x^*, y\rangle = \|x^*\|$.
2. *X sépare les points de Y :* $[\langle x^*, y\rangle = 0, \forall x^* \in X] \implies [x = 0]$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M, d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M,d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M,d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*
2. *Il existe une topologie τ sur M telle que (M,τ) est compact, d est τ-s.c.i. et $X = \mathrm{Lip}_0(M,d) \cap \mathcal{C}(M,\tau)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_L$.*

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M, d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*
2. *Il existe une topologie τ sur M telle que (M, τ) est compact, d est τ-s.c.i. et $X = \mathrm{Lip}_0(M, d) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_L$.*

Motivation :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M, d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*
2. *Il existe une topologie τ sur M telle que (M, τ) est compact, d est τ-s.c.i. et $X = \mathrm{Lip}_0(M, d) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_L$.*

Motivation : Soit M un espace métrique uniformément discret et borné. Est-ce que $\mathcal{F}(M)$ a (MAP) ?

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M, d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*
2. *Il existe une topologie τ sur M telle que (M, τ) est compact, d est τ-s.c.i. et $X = \mathrm{Lip}_0(M, d) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ équipé de la norme $\| \cdot \|_L$.*

Motivation : Soit M un espace métrique uniformément discret et borné. Est-ce que $\mathcal{F}(M)$ a (MAP) ?
$\rightarrow$ Si non, alors il existe une norme équivalente sur ℓ_1 qui n'a pas (MAP).

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M,d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*
2. *Il existe une topologie τ sur M telle que (M,τ) est compact, d est τ-s.c.i. et $X = \mathrm{Lip}_0(M,d) \cap \mathcal{C}(M,\tau)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_L$.*

Motivation : Soit M un espace métrique uniformément discret et borné. Est-ce que $\mathcal{F}(M)$ a (MAP) ?
$\rightarrow$ Si non, alors il existe une norme équivalente sur ℓ_1 qui n'a pas (MAP).
$\rightarrow$ Si oui, tout espace de Banach est approximable (au sens de Kalton).

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M,d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*
2. *Il existe une topologie τ sur M telle que (M,τ) est compact, d est τ-s.c.i. et $X = \mathrm{Lip}_0(M,d) \cap \mathcal{C}(M,\tau)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_L$.*

Motivation : Soit M un espace métrique uniformément discret et borné. Est-ce que $\mathcal{F}(M)$ a (MAP) ?
$\rightarrow$ Si non, alors il existe une norme équivalente sur ℓ_1 qui n'a pas (MAP).
$\rightarrow$ Si oui, tout espace de Banach est approximable (au sens de Kalton).

Si un Banach X a (RNP), est 1-complémenté dans son bidual et a (AP), alors X a (MAP).

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit (M, d) un espace métrique uniformément discret, borné et séparable. Soit X un espace de Banach. Alors LASSE :

1. *X est un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$: $X^* \equiv \mathcal{F}(M)$ et $\delta(M) \subset \mathcal{F}(M)$ est w^*-fermé.*
2. *Il existe une topologie τ sur M telle que (M, τ) est compact, d est τ-s.c.i. et $X = \mathrm{Lip}_0(M, d) \cap \mathcal{C}(M, \tau)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_L$.*

Motivation : Soit M un espace métrique uniformément discret et borné. Est-ce que $\mathcal{F}(M)$ a (MAP) ?
$\rightarrow$ Si non, alors il existe une norme équivalente sur ℓ_1 qui n'a pas (MAP).
$\rightarrow$ Si oui, tout espace de Banach est approximable (au sens de Kalton).

Si un Banach X a (RNP), est 1-complémenté dans son bidual et a (AP), alors X a (MAP).
Comme un espace dual est 1-complémenté dans son bidual, il est pertinent d'étudier si $\mathcal{F}(M)$ est un dual.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparable, uniformément discret et borné tel que
a) $\mathcal{F}(M)$ n'admet pas de prédual naturel.
b) $\mathcal{F}(M)$ admet un prédual.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparable, uniformément discret et borné tel que
a) $\mathcal{F}(M)$ n'admet pas de prédual naturel.
b) $\mathcal{F}(M)$ admet un prédual.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ admet à la fois un prédual naturel et un prédual non naturel.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparable, uniformément discret et borné tel que
a) $\mathcal{F}(M)$ n'admet pas de prédual naturel.
b) $\mathcal{F}(M)$ admet un prédual.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ admet à la fois un prédual naturel et un prédual non naturel.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

- En effet, soit $P\colon \mathcal{F}(M)^{**} \rightarrow \mathcal{F}(M)$ une projection de norme 1.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

- En effet, soit $P \colon \mathcal{F}(M)^{**} \to \mathcal{F}(M)$ une projection de norme 1.
- Soit $A_n = B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(a), 1 + \frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(b), 1 + \frac{1}{n}\right)$.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

- En effet, soit $P\colon \mathcal{F}(M)^{**} \to \mathcal{F}(M)$ une projection de norme 1.
- Soit $A_n = B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(a), 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(b), 1+\frac{1}{n}\right)$.
- Par compacité préfaible : $\exists\, \varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

- En effet, soit $P\colon \mathcal{F}(M)^{**} \to \mathcal{F}(M)$ une projection de norme 1.
- Soit $A_n = B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(a), 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(b), 1+\frac{1}{n}\right)$.
- Par compacité préfaible : $\exists\, \varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- On a alors $\|\varphi - 0\| = \|\varphi - \delta(a)\| = \|\varphi - \delta(b)\| = 1$.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

- En effet, soit $P\colon \mathcal{F}(M)^{**} \to \mathcal{F}(M)$ une projection de norme 1.
- Soit $A_n = B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(a), 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(b), 1+\frac{1}{n}\right)$.
- Par compacité préfaible : $\exists\, \varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- On a alors $\|\varphi - 0\| = \|\varphi - \delta(a)\| = \|\varphi - \delta(b)\| = 1$.
- Et aussi $\|P(\varphi)\| = \|P(\varphi) - \delta(a)\| = \|P(\varphi) - \delta(b)\| = 1$.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

- En effet, soit $P\colon \mathcal{F}(M)^{**} \rightarrow \mathcal{F}(M)$ une projection de norme 1.
- Soit $A_n = B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(a), 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(b), 1+\frac{1}{n}\right)$.
- Par compacité préfaible : $\exists\, \varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- On a alors $\|\varphi - 0\| = \|\varphi - \delta(a)\| = \|\varphi - \delta(b)\| = 1$.
- Et aussi $\|P(\varphi)\| = \|P(\varphi) - \delta(a)\| = \|P(\varphi) - \delta(b)\| = 1$.
- Or $\frac{\delta(a)}{2}$ et $\frac{\delta(b)}{2}$ sont des points extrémaux de $B_{\mathcal{F}(M)}$.

$\rightarrow$ Il existe un espace métrique M séparable, uniformément discret et borné tel que $\mathcal{F}(M)$ n'est pas 1-complémenté dans son bidual.

- En effet, soit $P\colon \mathcal{F}(M)^{**} \to \mathcal{F}(M)$ une projection de norme 1.
- Soit $A_n = B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(a), 1+\frac{1}{n}\right) \cap B_{\mathcal{F}(M)^{**}}\left(\delta(b), 1+\frac{1}{n}\right)$.
- Par compacité préfaible : $\exists\, \varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- On a alors $\|\varphi - 0\| = \|\varphi - \delta(a)\| = \|\varphi - \delta(b)\| = 1$.
- Et aussi $\|P(\varphi)\| = \|P(\varphi) - \delta(a)\| = \|P(\varphi) - \delta(b)\| = 1$.
- Or $\frac{\delta(a)}{2}$ et $\frac{\delta(b)}{2}$ sont des points extrémaux de $B_{\mathcal{F}(M)}$.
- Donc $\delta(a)/2 = P(\varphi) = \delta(b)/2$, contradiction. $\square$

Pour un Banach X, on définit une tranche de B_X par :

$$S(f,\alpha) := \{x \in B_X : f(x) > \|f\| - \alpha\},\ f \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Pour un Banach X, on définit une tranche de B_X par :

$$S(f,\alpha) := \{x \in B_X : f(x) > \|f\| - \alpha\},\ f \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Soit $x \in B_X$, alors x est un :

Pour un Banach X, on définit une tranche de B_X par :

$$S(f, \alpha) := \left\{x \in B_X : f(x) > \|f\| - \alpha\right\},\ f \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Soit $x \in B_X$, alors x est un :

- **Point extrémal** si $\forall y \neq z \in B_X : x \neq \frac{1}{2}(y + z)$.

Pour un Banach X, on définit une tranche de B_X par :

$$S(f,\alpha) := \{x \in B_X : f(x) > \|f\| - \alpha\}, \; f \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Soit $x \in B_X$, alors x est un :

- **Point extrémal** si $\forall y \neq z \in B_X : x \neq \frac{1}{2}(y+z)$.
- **Point extrémal préservé** si c'est un point extrémal de $B_{X^{**}}$.

De manière équivalente, les tranches de B_X contenant x forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie faible.

Pour un Banach X, on définit une tranche de B_X par :

$$S(f,\alpha) := \{x \in B_X : f(x) > \|f\| - \alpha\}, \ f \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Soit $x \in B_X$, alors x est un :

- **Point extrémal** si $\forall y \neq z \in B_X : x \neq \frac{1}{2}(y+z)$.
- **Point extrémal préservé** si c'est un point extrémal de $B_{X^{**}}$.

De manière équivalente, les tranches de B_X contenant x forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie faible.

- **Point de dentabilité** si B_X admet des tranches contenant x de diamètre arbitrairement petit. Ces tranches forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie de la norme.

Pour un Banach X, on définit une tranche de B_X par :

$$S(f,\alpha) := \{x \in B_X : f(x) > \|f\| - \alpha\},\ f \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Soit $x \in B_X$, alors x est un :

- **Point extrémal** si $\forall y \neq z \in B_X : x \neq \frac{1}{2}(y+z)$.
- **Point extrémal préservé** si c'est un point extrémal de $B_{X^{**}}$.
De manière équivalente, les tranches de B_X contenant x forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie faible.
- **Point de dentabilité** si B_X admet des tranches contenant x de diamètre arbitrairement petit. Ces tranches forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie de la norme.
- **Point exposé** si il existe $f \in X^*$ tel que $f(x) > f(z)$ pour tout $z \in B_X \setminus \{x\}$.

Pour un Banach X, on définit une tranche de B_X par :

$$S(f,\alpha) := \{x \in B_X : f(x) > \|f\| - \alpha\},\ f \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Soit $x \in B_X$, alors x est un :

- **Point extrémal** si $\forall y \neq z \in B_X : x \neq \frac{1}{2}(y+z)$.
- **Point extrémal préservé** si c'est un point extrémal de $B_{X^{**}}$.
De manière équivalente, les tranches de B_X contenant x forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie faible.
- **Point de dentabilité** si B_X admet des tranches contenant x de diamètre arbitrairement petit. Ces tranches forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie de la norme.
- **Point exposé** si il existe $f \in X^*$ tel que $f(x) > f(z)$ pour tout $z \in B_X \setminus \{x\}$.
- **Point fortement exposé** si il existe $f \in X^*$ tel que les tranches $\{S(f,\alpha) : \alpha > 0\}$ forment une base de voisinage relatif de x pour la topologie de la norme.

Théorème (Weaver '99)

Soit M un espace métrique et soit μ un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$. Alors il existe $x \neq y \in M$ tel que :

$$\mu = m_{xy} := \frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x,y)}.$$

Théorème (Weaver '99)

Soit M un espace métrique et soit μ un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$. Alors il existe $x \neq y \in M$ tel que :

$$\mu = m_{xy} := \frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x,y)}.$$

On appelle molécule tout élément de la forme m_{xy}.

Théorème (Weaver '99)

Soit M un espace métrique et soit μ un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$. Alors il existe $x \neq y \in M$ tel que :

$$\mu = m_{xy} := \frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x,y)}.$$

On appelle molécule tout élément de la forme m_{xy}.

On note $V \subset S_{\mathcal{F}(M)}$ l'ensemble des molécules.

Théorème (Weaver '99)

Soit M un espace métrique et soit μ un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$. Alors il existe $x \neq y \in M$ tel que :

$$\mu = m_{xy} := \frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x,y)}.$$

On appelle molécule tout élément de la forme m_{xy}.

On note $V \subset S_{\mathcal{F}(M)}$ l'ensemble des molécules.

[García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18] :

Nouvelle preuve basé sur le fait que $\overline{V}^w \subset V \cup \{0\}$.

Plus récemment, Aliaga et Guirao ont poussé plus loin ce travail.

Plus récemment, Aliaga et Guirao ont poussé plus loin ce travail.

Théorème (Aliaga - Guirao '17)

Soit K un espace métrique compact et soit $x \neq y \in K$. Alors, LASSE

1. $m_{xy} \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
2. $m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
3. $[x, y] = \{x, y\}$

($[x, y] = \{z \in M \,:\, d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$.)

Plus récemment, Aliaga et Guirao ont poussé plus loin ce travail.

Théorème (Aliaga - Guirao '17)

Soit K un espace métrique compact et soit $x \neq y \in K$. Alors, LASSE

1. $m_{xy} \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
2. $m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
3. $[x, y] = \{x, y\}$

($[x, y] = \{z \in M \,:\, d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$.)

Remarque : Si il existe $z \in [x, y] \setminus \{x, y\}$, alors

$$m_{xy} = \frac{d(x,z)}{d(x,y)} m_{xz} + \frac{d(y,z)}{d(x,y)} m_{zy}.$$

Plus récemment, Aliaga et Guirao ont poussé plus loin ce travail.

Théorème (Aliaga - Guirao '17)

Soit K un espace métrique compact et soit $x \neq y \in K$. Alors, LASSE

1. $m_{xy} \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
2. $m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
3. $[x,y] = \{x,y\}$

($[x,y] = \{z \in M \ : \ d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)\}$.)

Remarque : Si il existe $z \in [x,y] \setminus \{x,y\}$, alors

$$m_{xy} = \frac{d(x,z)}{d(x,y)} m_{xz} + \frac{d(y,z)}{d(x,y)} m_{zy}.$$

[Aliaga - Guirao ('17)] : Caractérisation métrique des points extrémaux préservés.

Plus récemment, Aliaga et Guirao ont poussé plus loin ce travail.

Théorème (Aliaga - Guirao '17)

Soit K un espace métrique compact et soit $x \neq y \in K$. Alors, LASSE

1. $m_{xy} \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
2. $m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(K)})$
3. $[x,y] = \{x,y\}$

($[x,y] = \{z \in M \ : \ d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)\}$.)

Remarque : Si il existe $z \in [x,y] \setminus \{x,y\}$, alors

$$m_{xy} = \frac{d(x,z)}{d(x,y)} m_{xz} + \frac{d(y,z)}{d(x,y)} m_{zy}.$$

[Aliaga - Guirao ('17)] : Caractérisation métrique des points extrémaux préservés.

[García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca ('18)] : Caractérisation métrique des points fortement exposés.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. m_{xy} *est un point de dentabilité de* $B_{\mathcal{F}(M)}$.
2. m_{xy} *est un point extrémal préservé de* $B_{\mathcal{F}(M)}$.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. *m_{xy} est un point de dentabilité de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*
2. *m_{xy} est un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*

Idées de la preuves :

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. *m_{xy} est un point de dentabilité de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*
2. *m_{xy} est un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*

Idées de la preuves : Par l'absurde, $\mu = m_{xy} \in \operatorname{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \setminus \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. *m_{xy} est un point de dentabilité de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*
2. *m_{xy} est un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*

Idées de la preuves : Par l'absurde, $\mu = m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \setminus \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
Fixons $\varepsilon > 0$.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. m_{xy} *est un point de dentabilité de* $B_{\mathcal{F}(M)}$.
2. m_{xy} *est un point extrémal préservé de* $B_{\mathcal{F}(M)}$.

Idées de la preuves : Par l'absurde, $\mu = m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \setminus \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
Fixons $\varepsilon > 0$.
- Pour toute tranche S de $B_{\mathcal{F}(M)}$ contenant μ, il existe $\mu_S \in S \cap V$.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. *m_{xy} est un point de dentabilité de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*
2. *m_{xy} est un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*

Idées de la preuves : Par l'absurde, $\mu = m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \setminus \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
Fixons $\varepsilon > 0$.
- Pour toute tranche S de $B_{\mathcal{F}(M)}$ contenant μ, il existe $\mu_S \in S \cap V$.
- On obtient un net (μ_S) qui converge faiblement vers μ.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. m_{xy} *est un point de dentabilité de* $B_{\mathcal{F}(M)}$.
2. m_{xy} *est un point extrémal préservé de* $B_{\mathcal{F}(M)}$.

Idées de la preuves : Par l'absurde, $\mu = m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \setminus \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
Fixons $\varepsilon > 0$.
- Pour toute tranche S de $B_{\mathcal{F}(M)}$ contenant μ, il existe $\mu_S \in S \cap V$.
- On obtient un net (μ_S) qui converge faiblement vers μ.
- Lemme clé [GPPR '18] : Le net converge en norme vers μ.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. *m_{xy} est un point de dentabilité de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*
2. *m_{xy} est un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*

Idées de la preuves : Par l'absurde, $\mu = m_{xy} \in \text{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \setminus \text{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
Fixons $\varepsilon > 0$.
- Pour toute tranche S de $B_{\mathcal{F}(M)}$ contenant μ, il existe $\mu_S \in S \cap V$.
- On obtient un net (μ_S) qui converge faiblement vers μ.
- Lemme clé [GPPR '18] : Le net converge en norme vers μ.
- On en déduit l'existence d'une tranche S telle que $\mathrm{diam}(V \cap S) < \varepsilon$.

Théorème (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et $x \neq y \in M$. Alors LASSE

1. *m_{xy} est un point de dentabilité de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*
2. *m_{xy} est un point extrémal préservé de $B_{\mathcal{F}(M)}$.*

Idées de la preuves : Par l'absurde, $\mu = m_{xy} \in \mathrm{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \setminus \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
Fixons $\varepsilon > 0$.
- Pour toute tranche S de $B_{\mathcal{F}(M)}$ contenant μ, il existe $\mu_S \in S \cap V$.
- On obtient un net (μ_S) qui converge faiblement vers μ.
- Lemme clé [GPPR '18] : Le net converge en norme vers μ.
- On en déduit l'existence d'une tranche S telle que $\mathrm{diam}(V \cap S) < \varepsilon$.
- $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}\, V$: $\exists S$ contenant μ avec $\mathrm{diam}(S) < \varepsilon$. $\square$

Les principales questions concernant la structure extrémale de $\mathcal{F}(M)$ sont les suivantes :

Les principales questions concernant la structure extrémale de $\mathcal{F}(M)$ sont les suivantes :

Questions

a) Si $\mu \in \text{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$, est-ce que μ est de la forme $\mu = m_{xy}$ avec $x \neq y \in M$?

Les principales questions concernant la structure extrémale de $\mathcal{F}(M)$ sont les suivantes :

Questions

a. Si $\mu \in \text{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$, est-ce que μ est de la forme $\mu = m_{xy}$ avec $x \neq y \in M$?
b. Si $[x, y] = \{x, y\}$, est-ce que m_{xy} est un point extrémal de $B_{\mathcal{F}(M)}$?

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Corollaire (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors pour $\mu \in B_{\mathcal{F}(M)}$, LASSE :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Corollaire (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique séparable tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors pour $\mu \in B_{\mathcal{F}(M)}$, LASSE :

1. $\mu \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
2. $\mu \in \mathrm{exp}(B_{\mathcal{F}(M)})$.
3. *Il existe $x \neq y \in M$ tel que $[x, y] = \{x, y\}$ et $\mu = m_{xy}$.*

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.
- $X \subset S_0(M) \implies$ OPS (x_α) et (y_α) contenues dans $B(0, r)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.
- $X \subset S_0(M) \implies$ OPS (x_α) et (y_α) contenues dans $B(0, r)$.
- Par compacité préfaible de $\delta(B(0, r))$, OPS $\delta(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(x)$ et $\delta(y_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(y)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.
- $X \subset S_0(M) \implies$ OPS (x_α) et (y_α) contenues dans $B(0,r)$.
- Par compacité préfaible de $\delta(B(0,r))$, OPS $\delta(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(x)$ et $\delta(y_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(y)$.
- Quitte à extraire de nouveau, OPS $d(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow C \geq 0$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.
- $X \subset S_0(M) \implies$ OPS (x_α) et (y_α) contenues dans $B(0, r)$.
- Par compacité préfaible de $\delta(B(0, r))$, OPS $\delta(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(x)$ et $\delta(y_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(y)$.
- Quitte à extraire de nouveau, OPS $d(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow C \geq 0$.
- $X \subset \mathrm{lip}_0(M) \implies C \geq \delta > 0$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.
- $X \subset S_0(M) \implies$ OPS (x_α) et (y_α) contenues dans $B(0,r)$.
- Par compacité préfaible de $\delta(B(0,r))$, OPS $\delta(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(x)$ et $\delta(y_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(y)$.
- Quitte à extraire de nouveau, OPS $d(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow C \geq 0$.
- $X \subset \mathrm{lip}_0(M) \implies C \geq \delta > 0$.
- En conclusion, (m_{x_α, y_α}) converge préfaiblement vers $\frac{\delta(x)-\delta(y)}{C}$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.
- $X \subset S_0(M) \implies$ OPS (x_α) et (y_α) contenues dans $B(0,r)$.
- Par compacité préfaible de $\delta(B(0,r))$, OPS $\delta(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(x)$ et $\delta(y_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(y)$.
- Quitte à extraire de nouveau, OPS $d(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow C \geq 0$.
- $X \subset \mathrm{lip}_0(M) \implies C \geq \delta > 0$.
- En conclusion, (m_{x_α, y_α}) converge préfaiblement vers $\frac{\delta(x)-\delta(y)}{C}$.
- Par unicité de la limite $\gamma = \frac{\delta(x)-\delta(y)}{C}$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel qu'il existe $X \subset S_0(M)$ un prédual naturel de $\mathcal{F}(M)$. Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset V$.

Preuve :

- Par le théorème de séparation de Hahn Banach $B_{\mathcal{F}(M)} = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(V)$.
- Par le théorème de Milman ('47) : $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \overline{V}^{w^*}$.
- Soit $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)})$ et $m_{x_\alpha, y_\alpha} \xrightarrow{w^*} \gamma$.
- $X \subset S_0(M) \implies$ OPS (x_α) et (y_α) contenues dans $B(0,r)$.
- Par compacité préfaible de $\delta(B(0,r))$, OPS $\delta(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(x)$ et $\delta(y_\alpha) \xrightarrow{w^*} \delta(y)$.
- Quitte à extraire de nouveau, OPS $d(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow C \geq 0$.
- $X \subset \mathrm{lip}_0(M) \implies C \geq \delta > 0$.
- En conclusion, (m_{x_α, y_α}) converge préfaiblement vers $\frac{\delta(x)-\delta(y)}{C}$.
- Par unicité de la limite $\gamma = \frac{\delta(x)-\delta(y)}{C}$.
- Or $\gamma \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset S_{\mathcal{F}(M)}$, donc $C = d(x,y)$. $\square$

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique uniformément discret et borné. Alors :
$m_{xy} \in \operatorname{ext} B_{\mathcal{F}(M)} \iff [x,y] = \{x,y\}$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique uniformément discret et borné. Alors :
$m_{xy} \in \operatorname{ext} B_{\mathcal{F}(M)} \iff [x,y] = \{x,y\}$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique uniformément discret.
Alors $x \in \operatorname{prext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \iff x \in \operatorname{strexp}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant.
Alors $x \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \iff x \in \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant.
Alors $x \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \iff x \in \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant. Alors la norme de $\mathcal{F}(M)$ est w^*-AUC.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant.
Alors $x \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \iff x \in \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant. Alors la norme de $\mathcal{F}(M)$ est w^*-AUC.

Pour un espace de Banach séparable X, le module de w*-AUC de X^* peut être défini comme suit :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant. Alors $x \in \mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \iff x \in \mathrm{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant. Alors la norme de $\mathcal{F}(M)$ est w^*-AUC.

Pour un espace de Banach séparable X, le module de w*-AUC de X^* peut être défini comme suit :

$$\overline{\delta}^*_{X^*}(t) = \inf_{x^* \in S_{X^*}} \inf_{\substack{x_n^* \xrightarrow{w^*} 0 \\ \|x_n^*\| \geq t}} \liminf_{n \to \infty} \|x^* + x_n^*\| - 1.$$

On dit que X^* est préfaiblement asymptotiquement uniformément convexe si $\overline{\delta}^*_{X^*}(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant. Alors $x \in \operatorname{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \iff x \in \operatorname{dent}(B_{\mathcal{F}(M)})$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique propre tel que $S_0(M)$ est 1-normant. Alors la norme de $\mathcal{F}(M)$ est w^*-AUC.

Pour un espace de Banach séparable X, le module de w*-AUC de X^* peut être défini comme suit :

$$\overline{\delta}^*_{X^*}(t) = \inf_{x^* \in S_{X^*}} \inf_{\substack{x_n^* \xrightarrow{w^*} 0 \\ \|x_n^*\| \geq t}} \liminf_{n \to \infty} \|x^* + x_n^*\| - 1.$$

On dit que X^* est préfaiblement asymptotiquement uniformément convexe si $\overline{\delta}^*_{X^*}(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

$\implies$ Chaque point de la sphère unité possède des voisinages préfaibles de diamètre arbitrairement petit.

Espaces libres vectoriels

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*)$$

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X)$$

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Et donc :

$$Lip_0(M, X^*) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Et donc :

$$Lip_0(M, X^*) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition (Espaces Lipschitz-libres vectoriels)

$\mathcal{F}(M, X) = \mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X.$

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Et donc :

$$Lip_0(M, X^*) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition (Espaces Lipschitz-libres vectoriels)

$\mathcal{F}(M, X) = \mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X.$

Il est assez naturel de se demander si les résultats obtenus pour $\mathcal{F}(M)$ peuvent se généraliser à $\mathcal{F}(M, X)$:

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Et donc :

$$Lip_0(M, X^*) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition (Espaces Lipschitz-libres vectoriels)

$\mathcal{F}(M, X) = \mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X.$

Il est assez naturel de se demander si les résultats obtenus pour $\mathcal{F}(M)$ peuvent se généraliser à $\mathcal{F}(M, X)$:

1. Propriétés de dualité (en particulier existence de préduaux naturels).

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Et donc :

$$Lip_0(M, X^*) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition (Espaces Lipschitz-libres vectoriels)

$\mathcal{F}(M, X) = \mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X.$

Il est assez naturel de se demander si les résultats obtenus pour $\mathcal{F}(M)$ peuvent se généraliser à $\mathcal{F}(M, X)$:

1. Propriétés de dualité (en particulier existence de préduaux naturels).
2. Propriétés de Schur.

$$Lip_0(M, X^*) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X^*) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{F}(M) \times X) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Et donc :

$$Lip_0(M, X^*) \equiv (\mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X)^*.$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition (Espaces Lipschitz-libres vectoriels)

$\mathcal{F}(M, X) = \mathcal{F}(M)\widehat{\otimes}_\pi X.$

Il est assez naturel de se demander si les résultats obtenus pour $\mathcal{F}(M)$ peuvent se généraliser à $\mathcal{F}(M, X)$:

1. Propriétés de dualité (en particulier existence de préduaux naturels).
2. Propriétés de Schur.

+ Fonctions Lipschitziennes qui atteignent leur norme.

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)},\ \|\langle f,\gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)},\ \|\langle f,\gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M,\ \|f(x)-f(y)\|_X = \|f\|_L\, d(x,y)$.

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}$, $\|\langle f,\gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M$, $\|f(x) - f(y)\|_X = \|f\|_L \, d(x,y)$.

Évidemment, si $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme fortement sur $(x,y) \in M^2$, alors f atteint sa norme d'opérateur sur la molécule m_{xy}.

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}$, $\|\langle f,\gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M$, $\|f(x)-f(y)\|_X = \|f\|_L\, d(x,y)$.

Évidemment, si $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme fortement sur $(x,y) \in M^2$, alors f atteint sa norme d'opérateur sur la molécule m_{xy}.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. On suppose :

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}$, $\|\langle f,\gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M$, $\|f(x) - f(y)\|_X = \|f\|_L \, d(x,y)$.

Évidemment, si $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme fortement sur $(x,y) \in M^2$, alors f atteint sa norme d'opérateur sur la molécule m_{xy}.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. On suppose :

1. *$\mathcal{F}(M)$ a (KMP)*

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M, X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)},\ \|\langle f, \gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M,\ \|f(x) - f(y)\|_X = \|f\|_L\, d(x, y)$.

Évidemment, si $f \in \mathrm{Lip}_0(M, X)$ atteint sa norme fortement sur $(x, y) \in M^2$, alors f atteint sa norme d'opérateur sur la molécule m_{xy}.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. On suppose :

1. $\mathcal{F}(M)$ *a (KMP)*
2. $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subseteq V$

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}$, $\|\langle f, \gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M$, $\|f(x) - f(y)\|_X = \|f\|_L \, d(x,y)$.

Évidemment, si $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme fortement sur $(x,y) \in M^2$, alors f atteint sa norme d'opérateur sur la molécule m_{xy}.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. On suppose :

1. *$\mathcal{F}(M)$ a (KMP)*
2. $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subseteq V$

Alors $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme d'opérateur si et seulement si f atteint sa norme fortement.

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}$, $\|\langle f,\gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M$, $\|f(x)-f(y)\|_X = \|f\|_L\, d(x,y)$.

Évidemment, si $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme fortement sur $(x,y) \in M^2$, alors f atteint sa norme d'opérateur sur la molécule m_{xy}.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. On suppose :

1. *$\mathcal{F}(M)$ a (KMP)*
2. $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subseteq V$

Alors $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme d'opérateur si et seulement si f atteint sa norme fortement.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. Alors :

L'identification $\mathrm{Lip}_0(M,X) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),X)$ nous conduit à considérer deux notions différentes pour $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$:

- f atteint sa norme d'opérateur si : $\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}$, $\|\langle f,\gamma\rangle\|_X = \|f\|_L$.
- f atteint sa norme fortement si : $\exists x \neq y \in M$, $\|f(x)-f(y)\|_X = \|f\|_L\, d(x,y)$.

Évidemment, si $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme fortement sur $(x,y) \in M^2$, alors f atteint sa norme d'opérateur sur la molécule m_{xy}.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. On suppose :

1. $\mathcal{F}(M)$ *a (KMP)*
2. $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subseteq V$

Alors $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$ atteint sa norme d'opérateur si et seulement si f atteint sa norme fortement.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique et X un espace de Banach. Alors :
$\mathcal{F}(M)$ a (RNP) $\implies$ $\mathrm{Lip}_{SNA}(M,X)$ est dense dans $f \in \mathrm{Lip}_0(M,X)$.

Merci pour votre attention !