Sur les fonctions Lipschitziennes qui atteignent leur norme

Colin PETITJEAN

Journée scientifique de la Fédération BFC–Mathématiques
Dijon, 9 novembre 2018

laboratoiredemathématiquesdebesançon
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ • CNRS • UMR 6623
UBFC UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ
INVESTISSEMENTS D'AVENIR

Notation :

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.
- X, Y des espaces de Banach réels, B_X la boule unité de X et S_X la sphère unité de X.

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.
- X, Y des espaces de Banach réels, B_X la boule unité de X et S_X la sphère unité de X.
- $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \{f : M \to Y \text{ Lipschitz } : f(0) = 0\}$

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.
- X, Y des espaces de Banach réels, B_X la boule unité de X et S_X la sphère unité de X.
- $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \{f : M \to Y \text{ Lipschitz } : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{d(x, y)}$.

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.
- X, Y des espaces de Banach réels, B_X la boule unité de X et S_X la sphère unité de X.
- $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \{f : M \to Y \text{ Lipschitz } : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{d(x, y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, Y), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.
- X, Y des espaces de Banach réels, B_X la boule unité de X et S_X la sphère unité de X.
- $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \{f : M \to Y \text{ Lipschitz } : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{d(x, y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, Y), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Lorsque $Y = \mathbb{R}$, on note simplement $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.
- X, Y des espaces de Banach réels, B_X la boule unité de X et S_X la sphère unité de X.
- $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \{f : M \to Y \text{ Lipschitz } : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{d(x, y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, Y), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Lorsque $Y = \mathbb{R}$, on note simplement $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y)$ atteint sa norme fortement si :

$$\exists x \neq y \in M, \ \|f(x) - f(y)\|_Y = \|f\|_L d(x, y).$$

Notation :

- (M, d) un espace métrique complet équipé d'un point distingué noté 0.
- X, Y des espaces de Banach réels, B_X la boule unité de X et S_X la sphère unité de X.
- $\mathrm{Lip}_0(M, Y) = \{f : M \to Y \text{ Lipschitz } : f(0) = 0\}$
- $\|f\|_L = \sup_{x \neq y \in M} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{d(x, y)}$.

Fait : $(\mathrm{Lip}_0(M, Y), \|\cdot\|_L)$ est un espace de Banach.

Lorsque $Y = \mathbb{R}$, on note simplement $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y)$ atteint sa norme fortement si :

$$\exists x \neq y \in M, \ \|f(x) - f(y)\|_Y = \|f\|_L d(x, y).$$

On note :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) := \{f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \ : \ \text{f atteint sa norme fortement}\}.$$

Pour $x \in M$, on définit $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_0(M)^*$ par $\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$.

Pour $x \in M$, on définit $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_0(M)^*$ par $\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$.

Définition (Espace Lispchitz-libre)

L'espace Lipschitz-libre sur M est défini par :
$\mathcal{F}(M) := \overline{\mathrm{vect}\,\{\delta(x)\,;\, x \in M\}}^{\|\cdot\|} \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$.

Pour $x \in M$, on définit $\delta(x) \in \mathrm{Lip}_0(M)^*$ par $\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$.

Définition (Espace Lispchitz-libre)

L'espace Lipschitz-libre sur M est défini par :
$\mathcal{F}(M) := \overline{\text{vect}\,\{\delta(x)\,;\, x \in M\}}^{\|\cdot\|} \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$.

Remarque

L'application $\delta : x \in M \longmapsto \delta(x) \in \mathcal{F}(M)$ est une isométrie :
$\|\delta(x) - \delta(y)\|_{\mathcal{F}(M)} = d(x, y)$.

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

L'espace libre $\mathcal{F}(M)$ possède la propriété suivante :

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

L'espace libre $\mathcal{F}(M)$ possède la propriété suivante :
$\forall f \in \mathrm{Lip}_0(M,Y)$, $\exists!\, \overline{f} : \mathcal{F}(M) \to Y$ *vérifiant* $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)} = \|f\|_L$ *et tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta"'] & Y \\ \mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\overline{f}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

L'espace libre $\mathcal{F}(M)$ possède la propriété suivante :
$\forall f \in \mathrm{Lip}_0(M,Y)$, $\exists! \, \overline{f} : \ \mathcal{F}(M) \to Y$ *vérifiant* $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)} = \|f\|_L$ *et tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta"'] & Y \\ \mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \overline{f}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

L'application $f \in \mathrm{Lip}_0(M,Y) \mapsto \overline{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)$ *est une isométrie linéaire surjective :* $\mathrm{Lip}_0(M,Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)$.

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

L'espace libre $\mathcal{F}(M)$ possède la propriété suivante :
$\forall f \in \mathrm{Lip}_0(M,Y)$, $\exists! \, \overline{f} : \ \mathcal{F}(M) \to Y$ *vérifiant* $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)} = \|f\|_L$ *et tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta"'] & Y \\ \mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \overline{f}\Big(\sum_{i=1}^n a_i \delta(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

L'application $f \in \mathrm{Lip}_0(M,Y) \mapsto \overline{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)$ *est une isométrie linéaire surjective :* $\mathrm{Lip}_0(M,Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)$.

Remarques :

- Pour $Y = \mathbb{R}$, on obtient : $\mathcal{F}(M)^* \equiv \mathrm{Lip}_0(M)$.

Proposition (Propriété fondamentale de linéarisation)

L'espace libre $\mathcal{F}(M)$ possède la propriété suivante :
$\forall f \in \mathrm{Lip}_0(M,Y)$, $\exists! \, \overline{f} : \mathcal{F}(M) \to Y$ *vérifiant* $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)} = \|f\|_L$ *et tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta"'] & Y \\ \mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \overline{f}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

L'application $f \in \mathrm{Lip}_0(M,Y) \mapsto \overline{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)$ *est une isométrie linéaire surjective :* $\mathrm{Lip}_0(M,Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M),Y)$.

Remarques :

- Pour $Y = \mathbb{R}$, on obtient : $\mathcal{F}(M)^* \equiv \mathrm{Lip}_0(M)$.
- Dans la suite, on utilisera uniquement la notation « f » pour référer à la fois à une fonction Lipschitzienne et à l'opérateur Lipschitzien associé.

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$ atteint sa norme d'opérateur si :

$$\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}, \ \|f(\gamma)\|_Y = \|f\|_L.$$

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$ atteint sa norme d'opérateur si :

$$\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}, \ \|f(\gamma)\|_Y = \|f\|_L.$$

On note alors :

$$\mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y) := \{f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \ : \ \text{f atteint sa norme d'opérateur}\}.$$

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$ atteint sa norme d'opérateur si :

$$\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}, \ \|f(\gamma)\|_Y = \|f\|_L.$$

On note alors :

$$\mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y) := \{f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \ : \ \text{f atteint sa norme d'opérateur}\}.$$

Remarque : Si $f \in \mathrm{SNA}(M, Y)$, alors il existe $x \neq y \in M$ tels que :

$$\left\| \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} \right\|_Y = \|f\|_L.$$

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$ atteint sa norme d'opérateur si :

$$\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}, \ \|f(\gamma)\|_Y = \|f\|_L.$$

On note alors :

$$\mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y) := \{f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \ : \ \text{f atteint sa norme d'opérateur}\}.$$

Remarque : Si $f \in \mathrm{SNA}(M, Y)$, alors il existe $x \neq y \in M$ tels que :

$$\left\| \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} \right\|_Y = \|f\|_L.$$

Autrement dit,

$$\left\| f\left(\frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x, y)}\right) \right\|_Y = \|f\|_L.$$

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$ atteint sa norme d'opérateur si :

$$\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}, \ \|f(\gamma)\|_Y = \|f\|_L.$$

On note alors :

$$\mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y) := \{f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \ : \ \text{f atteint sa norme d'opérateur}\}.$$

Remarque : Si $f \in \mathrm{SNA}(M, Y)$, alors il existe $x \neq y \in M$ tels que :

$$\left\| \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} \right\|_Y = \|f\|_L.$$

Autrement dit,

$$\left\| f\left(\frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x, y)} \right) \right\|_Y = \|f\|_L.$$

Ainsi f atteint sa norme d'opérateur sur $\dfrac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x, y)} \in S_{\mathcal{F}(M)}$.

Définition

Une fonction $f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}(M), Y)$ atteint sa norme d'opérateur si :

$$\exists \gamma \in B_{\mathcal{F}(M)}, \ \|f(\gamma)\|_Y = \|f\|_L.$$

On note alors :

$$\mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y) := \{f \in \mathrm{Lip}_0(M, Y) \ : \ \text{f atteint sa norme d'opérateur}\}.$$

Remarque : Si $f \in \mathrm{SNA}(M, Y)$, alors il existe $x \neq y \in M$ tels que :

$$\left\| \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} \right\|_Y = \|f\|_L.$$

Autrement dit,

$$\left\| f\left(\frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x, y)} \right) \right\|_Y = \|f\|_L.$$

Ainsi f atteint sa norme d'opérateur sur $\dfrac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x, y)} \in S_{\mathcal{F}(M)}$.

$$\boxed{\mathrm{SNA}(M, Y) \subset \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)}$$

Question 1

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)$$

Question 1

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)$$

Bishop–Phelps ('61) : Pour tout espace de Banach, l'ensemble $\overline{\mathrm{NA}(X,\mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\overline{\mathrm{NA}(X,\mathbb{R})} = X^*.$$

Question 1

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)$$

Bishop–Phelps ('61) : Pour tout espace de Banach, l'ensemble $\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})} = X^*.$$

Lindenstrauss ('63) : Faux dans le cadre des fonctions à valeurs vectorielles.

Question 1

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)$$

Bishop–Phelps ('61) : Pour tout espace de Banach, l'ensemble $\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})} = X^*.$$

Lindenstrauss ('63) : Faux dans le cadre des fonctions à valeurs vectorielles.

Un espace de Banach X a la propriété (A) si pour tout espace de Banach Y :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, Y)} = \mathcal{L}(X, Y).$$

Question 1

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)$$

Bishop–Phelps ('61) : Pour tout espace de Banach, l'ensemble $\overline{\mathrm{NA}(X,\mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\overline{\mathrm{NA}(X,\mathbb{R})} = X^*.$$

Lindenstrauss ('63) : Faux dans le cadre des fonctions à valeurs vectorielles.

Un espace de Banach X a la propriété (A) si pour tout espace de Banach Y :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, Y)} = \mathcal{L}(X, Y).$$

- Réflexivité $\implies$ (A).

Question 1

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)$$

Bishop–Phelps ('61) : Pour tout espace de Banach, l'ensemble $\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})} = X^*.$$

Lindenstrauss ('63) : Faux dans le cadre des fonctions à valeurs vectorielles.

Un espace de Banach X a la propriété (A) si pour tout espace de Banach Y :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, Y)} = \mathcal{L}(X, Y).$$

- Réflexivité $\implies$ (A).
- $L_1(\mathbb{R})$ ne possède pas la propriété (A).

Question 1

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\mathrm{SNA}(M, Y) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), Y)$$

Bishop–Phelps ('61) : Pour tout espace de Banach, l'ensemble $\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, \mathbb{R})} = X^*.$$

Lindenstrauss ('63) : Faux dans le cadre des fonctions à valeurs vectorielles.

Un espace de Banach X a la propriété (A) si pour tout espace de Banach Y :

$$\overline{\mathrm{NA}(X, Y)} = \mathcal{L}(X, Y).$$

- Réflexivité $\implies$ (A).
- $L_1(\mathbb{R})$ ne possède pas la propriété (A).

Question 2

Quelles sont les conditions sur un espace métrique M qui assurent :

$$\overline{\mathrm{SNA}(M, Y)} = \mathrm{Lip}_0(M, Y).$$

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SNA}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SNA}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Résumé de la preuve :

- $T : \delta(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{1}_{[0,x]} \in L_1(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire et surjective.

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SNA}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Résumé de la preuve :

- $T : \delta(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{1}_{[0,x]} \in L_1(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire et surjective.
- $T^* : f \in L_\infty(\mathbb{R}) \longmapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right] \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ également.

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SNA}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Résumé de la preuve :

- $T : \delta(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{1}_{[0,x]} \in L_1(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire et surjective.
- $T^* : f \in L_\infty(\mathbb{R}) \longmapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right] \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ également.
- A travers ces identifications isométriques, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ atteint sa norme fortement si il existe $x \neq y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\left| \int_x^y f(t)\mathrm{d}t \right| = \|f\|_\infty |x-y|.$$

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SNA}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Résumé de la preuve :

- $T : \delta(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{1}_{[0,x]} \in L_1(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire et surjective.
- $T^* : f \in L_\infty(\mathbb{R}) \longmapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right] \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ également.
- A travers ces identifications isométriques, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ atteint sa norme fortement si il existe $x \neq y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| = \|f\|_\infty |x-y|.$$

- Ce qui implique que $f = \|f\|_\infty$ ou $f = -\|f\|_\infty$ presque partout sur $[x,y]$.

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SNA}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.

Résumé de la preuve :

- $T : \delta(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{1}_{[0,x]} \in L_1(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire et surjective.
- $T^* : f \in L_\infty(\mathbb{R}) \longmapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right] \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ également.
- A travers ces identifications isométriques, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ atteint sa norme fortement si il existe $x \neq y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\left| \int_x^y f(t)\mathrm{d}t \right| = \|f\|_\infty |x-y|.$$

- Ce qui implique que $f = \|f\|_\infty$ ou $f = -\|f\|_\infty$ presque partout sur $[x,y]$.
- On choisit alors $A \subset \mathbb{R}$ mesurable tel que $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$ pour tout intervalle ouvert I.

Proposition

L'ensemble $\mathrm{SNA}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$*.*

Résumé de la preuve :

- $T : \delta(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{1}_{[0,x]} \in L_1(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire et surjective.
- $T^* : f \in L_\infty(\mathbb{R}) \longmapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right] \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ également.
- A travers ces identifications isométriques, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ atteint sa norme fortement si il existe $x \neq y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| = \|f\|_\infty |x-y|.$$

- Ce qui implique que $f = \|f\|_\infty$ ou $f = -\|f\|_\infty$ presque partout sur $[x,y]$.
- On choisit alors $A \subset \mathbb{R}$ mesurable tel que $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$ pour tout intervalle ouvert I.
- On pose $g = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus A}$, on alors $\|f-g\|_\infty \geq 1$ pour tout f qui atteint fortement sa norme. $\square$

Définition

On dit que M est un espace métriquement convexe ou encore géodésique si :

$$\forall x \neq y \in M, \exists z \in M \ : \ d(z,x) = d(z,y) = \frac{1}{2} d(x,y).$$

Définition

On dit que M est un espace métriquement convexe ou encore géodésique si :

$$\forall x \neq y \in M, \exists z \in M \ : \ d(z,x) = d(z,y) = \frac{1}{2} d(x,y).$$

Théorème (Kadets, Martin, Soloviova '16)

Si M est un espace métriquement convexe, alors l'ensemble $\mathrm{SNA}(M,\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathrm{Lip}_0(M)$.

Définition

On définit ($\sup \emptyset = 0$) :

$$\mathrm{lip}_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < d(x,y) < \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

Définition

On définit ($\sup \emptyset = 0$) :

$$\mathrm{lip}_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < d(x,y) < \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

On dit que $\mathrm{lip}_0(M)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$ si pour tout $\gamma \in \mathcal{F}(M)$:

$$\|\gamma\| = \sup \left\{ |f(\gamma)| \ : \ f \in B_{\mathrm{lip}_0(M)} \right\}.$$

Définition

On définit ($\sup \emptyset = 0$) :

$$\mathrm{lip}_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<d(x,y)<\varepsilon} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

On dit que $\mathrm{lip}_0(M)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$ si pour tout $\gamma \in \mathcal{F}(M)$:

$$\|\gamma\| = \sup \left\{ |f(\gamma)| \ : \ f \in B_{\mathrm{lip}_0(M)} \right\}.$$

Théorème (Godefroy '16)

Soit K un espace métrique compact tel que $\mathrm{lip}_0(K)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(K)$. Alors :

Définition

On définit ($\sup \emptyset = 0$) :

$$\mathrm{lip}_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0 < d(x,y) < \varepsilon} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

On dit que $\mathrm{lip}_0(M)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$ si pour tout $\gamma \in \mathcal{F}(M)$:

$$\|\gamma\| = \sup \left\{ |f(\gamma)| \ : \ f \in B_{\mathrm{lip}_0(M)} \right\}.$$

Théorème (Godefroy '16)

Soit K un espace métrique compact tel que $\mathrm{lip}_0(K)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(K)$. Alors :

(i) *Pour tout espace de Banach X, $\mathrm{SNA}(K, X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(K), X)$.*

Définition

On définit ($\sup \emptyset = 0$) :

$$\mathrm{lip}_0(M) := \left\{ f \in \mathrm{Lip}_0(M) : \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<d(x,y)<\varepsilon} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} = 0 \right\}.$$

On dit que $\mathrm{lip}_0(M)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$ si pour tout $\gamma \in \mathcal{F}(M)$:

$$\|\gamma\| = \sup \left\{ |f(\gamma)| \ : \ f \in B_{\mathrm{lip}_0(M)} \right\}.$$

Théorème (Godefroy '16)

Soit K un espace métrique compact tel que $\mathrm{lip}_0(K)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(K)$. Alors :

(i) *Pour tout espace de Banach X, $\mathrm{SNA}(K, X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(K), X)$.*

(ii) *Pour tout espace vectoriel de dimension finie F, $\mathrm{SNA}(K, F)$ est dense dans $\mathrm{Lip}_0(K, F)$.*

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

(ii) $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \left\{ \dfrac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\}$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) $\mathcal{F}(M)$ *a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

(ii) $\operatorname{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\}$.

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M),X)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

(ii) $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \left\{ \dfrac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\}$.

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M),X)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

(ii) $\text{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \left\{ \frac{\delta(x) - \delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\}$.

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M),X)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i') *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Radon-Nikodým (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point fortement exposé) .*

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

(ii) $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\}$.

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M),X)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i') *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Radon-Nikodým (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point fortement exposé) .*

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X)$ est dense dans $\mathrm{Lip}_0(M,X)$.

Comment obtenir la condition (i') et donc (i) ?

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

(ii) $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\}$.

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M), X)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i') *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Radon-Nikodým (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point fortement exposé) .*

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X)$ est dense dans $\mathrm{Lip}_0(M,X)$.

Comment obtenir la condition (i') et donc (i) ?
$\rightarrow$ Plonger linéairement $\mathcal{F}(M)$ dans un dual séparable X^*.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i) *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Krein-Milman (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point extrémal).*

(ii) $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \left\{ \dfrac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\}$.

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X) = \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M),X)$.

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique tel que :

(i') *$\mathcal{F}(M)$ a la propriété de Radon-Nikodým (tout ensemble convexe, fermé et borné possède un point fortement exposé) .*

Alors pour tout Banach X : $\mathrm{SNA}(M,X)$ est dense dans $\mathrm{Lip}_0(M,X)$.

Comment obtenir la condition (i') et donc (i) ?

$\rightarrow$ Plonger linéairement $\mathcal{F}(M)$ dans un dual séparable X^*.

$\rightarrow$ Étude des conditions pour que $\mathcal{F}(M)$ soit un dual séparable.

Comment obtenir la condition (ii) :

$$\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M} := \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\} ?$$

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique (borné) tel que :

Comment obtenir la condition (ii) :

$$\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M} := \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\} ?$$

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique (borné) tel que :

- $\mathcal{F}(M) \equiv X^*$ *et* $X \subset \mathrm{lip}_0(M)$

Comment obtenir la condition (ii) :

$$\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M} := \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\} ?$$

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique (borné) tel que :

- $\mathcal{F}(M) \equiv X^*$ *et* $X \subset \mathrm{lip}_0(M)$
- $\delta(M)$ *est préfaiblement fermé dans* $\mathcal{F}(M)$.

Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M}$.

Les conditions (i') et (ii) sont vérifiés dans les cas suivants :

- K un espace métrique compact tel que $\mathrm{lip}_0(K)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$.

Comment obtenir la condition (ii) :

$$\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M} := \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\} ?$$

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique (borné) tel que :

- $\mathcal{F}(M) \equiv X^*$ *et* $X \subset \mathrm{lip}_0(M)$
- $\delta(M)$ *est préfaiblement fermé dans* $\mathcal{F}(M)$.

Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M}$.

Les conditions (i') et (ii) sont vérifiés dans les cas suivants :

- K un espace métrique compact tel que $\mathrm{lip}_0(K)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$.
  $\rightarrow$ Compact dénombrable
  $\rightarrow$ "Petit espace de Cantor"
  $\rightarrow$ "(K, d^p) avec $0 < p < 1$"

Comment obtenir la condition (ii) :

$$\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M} := \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\} ?$$

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique (borné) tel que :

- $\mathcal{F}(M) \equiv X^*$ *et* $X \subset \mathrm{lip}_0(M)$
- $\delta(M)$ *est préfaiblement fermé dans* $\mathcal{F}(M)$.

Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M}$.

Les conditions (i') et (ii) sont vérifiés dans les cas suivants :

- K un espace métrique compact tel que $\mathrm{lip}_0(K)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$.
  $\rightarrow$ Compact dénombrable
  $\rightarrow$ "Petit espace de Cantor"
  $\rightarrow$ "(K, d^p) avec $0 < p < 1$"
- M uniformément discret et borné tel qu'il existe une topologie τ vérifiant (M, τ) compact et d est τ-sci.

Comment obtenir la condition (ii) :

$$\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M} := \left\{ \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)} \ : \ x \neq y \in M \right\} ?$$

Proposition (García-Lirola, Procházka, Rueda Zoca, P. '18)

Soit M un espace métrique (borné) tel que :

- $\mathcal{F}(M) \equiv X^*$ *et* $X \subset \mathrm{lip}_0(M)$
- $\delta(M)$ *est préfaiblement fermé dans* $\mathcal{F}(M)$.

Alors $\mathrm{ext}(B_{\mathcal{F}(M)}) \subset \mathcal{M}$.

Les conditions (i') et (ii) sont vérifiés dans les cas suivants :

- K un espace métrique compact tel que $\mathrm{lip}_0(K)$ est 1-normant pour $\mathcal{F}(M)$.
  $\rightarrow$ Compact dénombrable
  $\rightarrow$ "Petit espace de Cantor"
  $\rightarrow$ "(K, d^p) avec $0 < p < 1$"
- M uniformément discret et borné tel qu'il existe une topologie τ vérifiant (M, τ) compact et d est τ-sci.
- $M = (K, \|\cdot\|^p)$ avec K un compact préfaible d'un dual séparable (par exemple $K = B_{X^*}$ et $0 < p < 1$).

Merci pour votre attention !