Martingales et (RNP) dans les espaces Lipschitz-libres

I. Motivation - Résultats

II. Martingales dans les espaces de Banach.

III. Quelques idées de la preuve

I. Motivation / Résultats :

Dans tout cet exposé, (M, d) est un espace métrique, et on note $0 \in M$ un point qui jouera le rôle d'origine.

Théorème : $\exists!$ espace de Banach (à isométrie près), noté $\mathcal{F}(M)$, pour lequel il existe $\delta : M \to \mathcal{F}(M)$ une isométrie vérifiant $\overline{\text{span}}\, \delta(M) = \mathcal{F}(M)$, et :
$\forall X$ Banach, $\forall f : M \to X$ Lipschitz tel que $f(0) = 0$, $\exists!$ $\overline{f} : \mathcal{F}(M) \to X$ opérateur linéaire continue vérifiant $f = \overline{f} \circ \delta$ et $\|\overline{f}\| = Lip(f)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \\ \mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}(M)$ est l'espace Lipschitz-libre sur M

Plusieurs constructions possibles :

* Arens - Eells space (1956), Transportation cost spaces (voir le livre de Weaver et les articles de Ostrovskii)
* Une approche avec l'espace vectoriel libre ayant $M \setminus \{0\}$ comme base de Hamel et 0 comme vecteur nul (Pestov, 1986)
* Une approche avec les fonctionnelles évaluations ("$\delta(x)$") (Michael 1964 puis redécouvert par Kadets (1985), puis popularisé par Godefroy-Kalton en 2003).

$$\left.\begin{array}{l} Lip_0(M) = \{ f : M \to \mathbb{R} \text{ Lipschitz} \mid f(0) = 0 \} \\ \|f\|_L = \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \end{array}\right\} (Lip_0(M), \|\cdot\|_L) \text{ espace de Banach.}$$

$$\delta(x) : f \in Lip_0(M) \longmapsto f(x) \quad \Big\} \quad \delta(x) \in Lip_0(M)^* \text{ avec } \|\delta(x)\| = d(x, 0)$$

<u>Définition</u> : $\mathcal{F}(M) := \overline{\mathrm{vect}}\{\delta(x) \mid x \in M\} \subset Lip_0(M)$

<u>Faits</u> :
- $\mathcal{F}(M)$ vérifie la propriété universelle de l'introduction.
- $\mathcal{F}(M)^* \equiv Lip_0(M)$

<u>Remarques</u> :
- $\forall \gamma, \mu \in \mathcal{F}(M), \|\gamma - \mu\|_{\mathcal{F}(M)} = \sup\{\langle f, \gamma - \mu\rangle \mid f \in B_{Lip_0(M)}\}$
Formule qui rappelle le thm de dualité de Kantorovich Rubinstein (1958), et donc $\|\gamma - \mu\|_{\mathcal{F}(M)} \approx W_1(\gamma, \mu)$

- M séparable et μ une mesure borélienne sur M, alors (Aliaga-Pernecká '21)
$\int_M d(\cdot, 0)\, d|\mu| < +\infty \iff \mathcal{L}_\mu : f \in Lip_0(M) \longmapsto \int_M f\, d\mu$ appartient à $\mathcal{F}(M)$

- Cobzaş - P : $\mathcal{M} := \{$mesures de Borel finies sur $M \times M \setminus \underbrace{\{(x,x) \mid x \in M\}}_{=: D}\}$
$\forall \mu \in \mathcal{M}, \ \|\mu\|_{TV} := |\mu|(M \times M \setminus D)$

$\forall f \in Lip_0(M)$, on définit $\Psi(\mu)(f) := \int_{M\times M\setminus D} \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)}\, d\mu(x,y)$

$\Psi : \mathcal{M} \longrightarrow Lip_0(M)^*$

On a alors, si M est séparable, $\mathcal{M}/_{\mathrm{Ker}(\Psi)} \equiv \mathcal{F}(M)$.

<u>Programmes de recherche</u> : Etudier la structure (linéaire) de $\mathcal{F}(M)$, avec si possible des caractérisation métriques.

P_M : Propriété métrique $\qquad\qquad P_\ell$: Propriété linéaire

- $M \in (P_M) \overset{?}{\rightleftarrows} \mathcal{F}(M) \in (P_\ell)$
- $f : M \to N \in (P_M) \overset{?}{\rightleftarrows} \hat{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N) \in (P_\ell)$
$\qquad \sum a_i \delta(x_i) \mapsto \sum a_i \delta(f(x_i))$

<u>Rq</u> : $\mathcal{F}(M)$ difficile à analyser $\rightsquigarrow$ Plus simple lorsque M est compact.

<u>Aliaga - Procházka - P. (2021) : "Méthode de réduction aux compacts".</u>

APP '21 : Pour certaines propriétés, e.g. (Schur), W.S.C., D_1-saturation, $\mathcal{F}(M) \in (P) \iff \mathcal{F}(K) \in (P)$, $\forall K$ compact inclu dans M.

Théorème (Aliaga - Gartland - Procházka - P, '21)

$$\mathcal{F}(M) \in (RNP) \iff \mathcal{F}(K) \in (RNP), \quad \forall K \text{ compact inclu dans } M$$

Conséquences importantes :

$$\begin{tikzcd}
\text{K compact : $\mathcal{F}(K) \equiv \mathrm{lip}_0(K)^*$, $K \subset M$} \arrow[d, Rightarrow, "AGPP"] & \text{M est p1u} \arrow[l, Rightarrow, "AGPP"'] \arrow[r, Rightarrow, "AGPP"] & \text{$\mathrm{lip}_0(K)$ SPU de K, $\forall K \subset M$ compact} \arrow[d, Rightarrow, "APP + P"] \\
\mathcal{F}(M) \in (RNP) \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathcal{F}(M) \in (\mathrm{Schur}) \arrow[dl, Rightarrow] \\
& L_1 \not\hookrightarrow \mathcal{F}(M) \arrow[uu, Rightarrow, "Godard"] &
\end{tikzcd}$$

p1u = purement non 1-rectifiable : $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\forall f : A \to M$ Lipschitz, $\mathcal{H}^1(f(A)) = 0$

$$\iff \forall A \subset \mathbb{R} \text{ compact}, \ \lambda(A) > 0 \implies A \underset{\text{bi-Lip}}{\not\hookrightarrow} M$$

II. Martingales dans les espaces de Banach :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X un espace de Banach.

$L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X) = \{$ Classes d'équivalences f° Bochner mesurable $f : \Omega \to X$ tel que

$$\int_\Omega \|f\|_X \, d\mathbb{P} < \infty \}$$

Il s'agit d'un espace de Banach lorsqu'il est équipé de

$$\|f\|_{L_1} = E(\|f\|_X) = \int_\Omega \|f\|_X \, dP.$$

Proposition : $T : L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow L_1(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ opérateur borné.

Alors $\exists! \ \tilde{T} : L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X) \longrightarrow L_1(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'; X)$ tel que $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ et

$$\forall \varphi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \ \forall x \in X, \quad \tilde{T}(\varphi \otimes x) = T(\varphi) x$$

où $\varphi \otimes x : \omega \in \Omega \mapsto \varphi(\omega) x$

"Idea" $\sum \mathbb{1}_{A_i} x_i \longmapsto \sum T(\mathbb{1}_{A_i}) x_i$ $\oplus$ densité

On peut alors définir l'espérance conditionnelle à valeur dans X grâce à cette proposition et au fait que :

$\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ sous-tribu, $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{A}) : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ linéaire continue et de norme 1.

<u>Proposition :</u> $\exists !\ \mathbb{E}_X(\cdot \mid \mathcal{A}) : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X) \longrightarrow L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; X)$ linéaire continue de norme 1 tel que :

* $\forall \varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),\ \forall x \in X : \mathbb{E}_X(\varphi \otimes x \mid \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\varphi \mid \mathcal{A})\, x$

* $\begin{cases} \forall f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X) \\ \forall g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \end{cases} \quad \mathbb{E}_X(fg \mid \mathcal{A}) = g\,\mathbb{E}_X(f \mid \mathcal{A})$

<u>Remarques :</u> $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X)$

(i) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}_X(f \mid \mathcal{A})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_X(\mathbb{1}_A f \mid \mathcal{A})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A f)$

En particulier $\mathbb{E}(\mathbb{E}_X(f \mid \mathcal{A})) = \mathbb{E}(f)$.

(ii) Si $T : X \longrightarrow Y$ est un opérateur borné

On définit $\tilde{T} : L^1(X) \longrightarrow L^1(Y)$, $f \longmapsto T \circ f$, et $\tilde{T}$ opérateur borné tel que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

$\tilde{T}$ et $\mathbb{E}_{\cdot}(\cdot \mid \mathcal{A})$ commutent, dans le sens suivant

$\forall f \in L^1(X),\ \mathbb{E}_Y(\tilde{T}(f) \mid \mathcal{A}) = \mathbb{E}_Y(T \circ f \mid \mathcal{A}) = T \circ \mathbb{E}_X(f \mid \mathcal{A}) = \tilde{T}(\mathbb{E}_X(f \mid \mathcal{A}))$

<u>Définition :</u> $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X)$ est une martingale adapté à une filtration $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable
- $M_n = \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$

<u>Remarques :</u> $\forall n \leq m : M_n = \mathbb{E}(M_m \mid \mathcal{F}_n)$

et si $A \in \mathcal{F}_n$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A M_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(M_m \mid \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A M_m)$.

Définition : On dit que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(X)$ est uniformément intégrable si la suite $(\|M_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ est uniformément intégrable, i.e

* $(\|M_n\|)_n$ bornée dans L^1
* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{F}$:

$P(A) < \delta \Rightarrow \sup\limits_{n\geq 0} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \|M_n\|) < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \sup\limits_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\|M_n\| \mathbb{1}_{\{\|M_n\|>a\}}\right) \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$

Définition (RNP) : On dit que X a RNP si et seulement si $\forall (M_n) \subset L^1(X)$ martingale uniformément intégrable converge dans $L^1(X)$

III. Martingales dans les espaces libres :

Définition : W une collection de variable aléatoire $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X)$

- W a la propriété de Kalton ("mean KP") si : $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists E \subset M$ un sous-ensemble fini tel que $\sup\limits_{f\in W} \mathrm{dist}(f, L^1(\mathcal{F}[E]_\delta)) < \varepsilon$

  où $[E]_\delta := \{x \in M \mid d(x, E) \leq \delta\}$

- W est tendue ("mean tight") si : $\forall \varepsilon > 0, \exists K \subset M$ compact tel que $\sup\limits_{f\in W} \mathrm{dist}(f, L^1(\mathcal{F}(K))) < \varepsilon$

Remarques : (i) Si $|W| < +\infty$ alors $W \in (K)$ et $W \in (T)$

(ii) Pour nous, $W = \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où (M_n) est une martingale

(iii) (K) inspiré d'un Lemme de Kalton par $(\gamma_n)_n \subset \mathcal{F}(M) \xrightarrow{w} 0$

(T) inspiré de la notion pour les mesures : $\forall \varepsilon > 0, \exists K \subset X$ compact, $\forall \mu \in W$ $|\mu|(X\setminus K) < \varepsilon$.

Schéma de la preuve : $\mathcal{F}(K) \in (RNP), \forall K \subset M$ compact $\Rightarrow \mathcal{F}(M) \in (RNP)$

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale dans $\mathcal{F}(M)$ uniformément intégrable $\overset{\text{Prop 1.}}{\Longrightarrow}$ $W = \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a la propriété de Kalton $\overset{\text{Prop 2.}}{\Longrightarrow}$ W est tendue ("mean tight")

Proposition 1 : Soit $(M_n)_n$ une martingale bornée dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}(M))$, alors $(M_n)_n$ possède la propriété de Kalton.

Preuve : On raisonne par l'absurde : $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall E \subset M$ fini, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{dist}(M_n, L^1(\mathcal{F}[E]_\delta)) > \varepsilon$

- Etape 1 : OPS M est borné.
- Etape 2 : OPS $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ est fini.
- Etape 3 : OPS, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathrm{supp}(M_n(\omega))$ est fini
- Etape 4 : Construction d'une sous-suite "écartée"

On pose $N_0 = 0$ et $E_0 = \mathrm{supp}(M_0(\omega))$

$\exists N_1 > N_0$ tel que $\mathrm{dist}\left(M_{N_1}, L^1\left(\mathcal{F}_{N_1}; \mathcal{F}([E_0]_\delta)\right)\right) > \varepsilon$

On pose $E_1 = \bigcup_{n \leq N_1} \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathrm{supp}(M_n(\omega))$

On continue ainsi par récurrence pour obtenir $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset \dots \subset M$,

et $M_i' := M_{N_i}$ tels que

 * $\mathrm{supp}(M_i'(\omega)) \subset E_i$, $\forall \omega \in \Omega$
 * $\mathrm{dist}\left(M_{i+1}', L^1(\mathcal{F}_{i+1}; \mathcal{F}[E_i]_\delta)\right) > \varepsilon$

- Etape 5 : Construction de fonctions normantes et à supports disjoints

Par Hahn-Banach, $\forall i \geq 1$, $\exists \tilde{f}_i \in L^\infty(\mathcal{A}_{N_i}; Lip_0(M)) = L^1(\mathcal{A}_{N_i}; \mathcal{F}(M))^*$ tq :

$\|\tilde{f}_i\|_{L^\infty} \leq 1$, $\tilde{f}_i(\omega) \equiv 0$ sur $[E_{i-1}]_\delta$ pour tout $\omega \in \Omega$

et $E(\langle \tilde{f}_i, M_i' \rangle) > \varepsilon$

En fait, en utilisant le théorème de McShane-Whitney (extension de f° Lip) : $\forall \omega \in \Omega$

$\exists f_i(\omega) \in Lip_0(M)$ tel que $f_i(\omega) \equiv \tilde{f}_i(\omega)$ sur $E_i \cup [E_{i-1}]_\delta$, $\mathrm{supp}(f_i(\omega)) \subset [E_i]_\delta$

et $\|f_i(\omega)\|_L \leq C$ (indépendant de i et ω)

De plus chaque f_i est $\mathcal{A}_{N_i}$-mesurable. Les supports des (f_i) étant disjoints, on a

$$\left\|\sum_{n=1}^{i} f_n(\omega)\right\|_L = \left\|\sum_{n=1}^{i} f_n^+(\omega) - \sum_{n=1}^{i} f_n^-(\omega)\right\| = \left\| \max_{n=1\dots i} \{f_n^+(\omega)\} - \max_{n=1\dots i} \{f_n^-(\omega)\}\right\| \leq 2C$$

où $f_n^+(\omega) = \max(0, f_n(\omega))$

$f_n^-(\omega) = \max(0, -f_n(\omega))$

• Etape 6 : Fin de l'argument "bosse glissante"

$$2C\|M_i'\|_{L^1} \geqslant \mathbb{E}\left(\left\langle \sum_{n=1}^{i} f_n , M_i' \right\rangle\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{i} \langle f_n , M_i' \rangle\right)$$ $\rightarrow$ $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{A}_n)$ commute avec les opérateurs linéaires

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{i} \langle f_n , \mathbb{E}(M_i' \mid \mathcal{A}_n)\rangle\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{i} \langle f_n , M_n' \rangle\right) \geqslant i\varepsilon \quad \ldots \quad \varepsilon > 0,\ C < +\infty \text{ et } i \text{ arbitraire}$$

Contradiction de (M_n') bornée dans L^1 ∎

Proposition 2 : Si $W \subset L^1(\mathcal{F}(M))$ a la propriété de Kalton, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \subset M$ compact, $\exists T : W \longrightarrow L^1(\mathcal{F}(K))$ tel que :

- $\mathbb{E}(\|F - T(F)\|) \leqslant \varepsilon$ for every $F \in W$, and
- $\exists T_n : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ linéaire continue, ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{F \in W} \mathbb{E}(\|T_n(F) - T(F)\|) = 0$$

Preuve : OPS M borné. On fixe $R = \mathrm{diam}(M)$ et $\varepsilon_0 := \varepsilon$ et $\varepsilon_n := \frac{\varepsilon}{2^n}$.

On pose également $\delta_n = R \times \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon_n} - 2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$K_0 := M$ et $T_0 := \mathrm{Id} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$

Par la propriété de Kalton : $\exists E_1 \subset M$ fini tel que $0 \in E_1$ et

$$\|T_0\| \sup_{F \in W} \mathrm{dist}(F, L_1(\mathcal{F}[E_1]_{\delta_1})) < \varepsilon_1^2$$

On pose alors $K_1 := K_0 \cap [E_1]_{2\delta_1}$. On considère $h_1 : M \to \mathbb{R}$ tel que

$\mathrm{supp}(h_1) = [E_1]_{2\delta_1}$, $0 \leqslant h_1 \leqslant 1$, $h_1 = 1$ sur $[E_1]_{\delta_1}$, $\|h_1\|_L \leqslant \frac{1}{\delta_1}$

$\left(h_1(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{1}{\delta_1} d(x, [E_1]_{\delta_1})\right\}\right)$

$S_1 := \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ tel que $\langle S_1 \mu , f \rangle = \langle \mu , f h_1 \rangle \Rightarrow \|S_1\| \leqslant 1 + \frac{R}{\delta_1} = \frac{1}{\varepsilon_1} - 1$

$S_1{}_{|\mathcal{F}[E_1]_\delta} = \mathrm{Id}$

$S_1(\mathcal{F}(M)) = S_1(\mathcal{F}(K_0)) \subset \mathcal{F}(K_1)$. On pose $T_1 = S_1 \circ T_0$

Enfin : Si $F \in W$, $\exists G \in L^1(\mathcal{F}[E_1]_{\delta_1})$ tel que $\mathbb{E}(\|T_0(F) - T_0(G)\|) < \varepsilon_m^2$

Puis $T_1(G) = S_1 \circ T_0(G) = S_1(G) = T_0(G)$.

Donc : $\mathbb{E}(\|T_1(F) - T_0(F)\|) \leq \mathbb{E}(\|T_0(G) - T_0(F)\|) + \mathbb{E}(\|T_1(F) - T_1(G)\|)$

$$\leq (1 + \|S_1\|)\mathbb{E}(\|T_0(G) - T_0(F)\|) \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \times \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$$

⊛ En répétant l'argument par récurrence, on construit $(E_m)_m$ sous-ensembles finis de M, $(K_m)_m$ sous-ensembles fermés de M et $S_m : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ opérateurs bornés tels que : $\left(\varepsilon_m = \frac{\varepsilon}{2^m} \text{ et } \delta_m = R \times \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_m} - 2}\right)$

- $K_m = K_{m-1} \cap [E_m]_{2\delta_m}$
- Les opérateurs S_m commutent entre eux
- $T_m(\mathcal{F}(M)) \subset \mathcal{F}(K_m)$ où $T_m = S_m \circ S_{m-1} \circ \dots \circ S_0$
- $\mathbb{E}(\|T_m(F) - T_{m-1}(F)\|) < \varepsilon_m$, $\forall F \in W$

KP $\Rightarrow \exists E_m$ finite $\subset M$, $\sup_{F \in W} \operatorname{dist}(F, L^1([E_m]_{\delta_m})) < \varepsilon_m^2 \times \frac{1}{\|T_{m-1}\|}$. $K_m := K_{m-1} \cap [E_m]_{2\delta_m}$

$h_m \in Lip_0(M)$: $\operatorname{supp}(h_m) \subset [E_m]_{2\delta_m}$, $h_m \equiv 1$ sur $[E_m]_{\delta_m}$ et $0 \leq h_m \leq 1$, $\|h_m\| \leq \frac{1}{\delta_m}$

S_m opérateur de multiplication par h_m $\rightsquigarrow \|S_m\| \leq 1 + \frac{R}{\delta_m} = \frac{1}{\varepsilon_m} - 1$. Rmk : $S_m = Id$ sur $\mathcal{F}[E_m]_{\delta_m}$

$T_m(\mathcal{F}(M)) = S_m \circ T_{m-1}(\mathcal{F}(M)) \subset S_m(\mathcal{F}(K_{m-1})) \subset \mathcal{F}(K_{m-1} \cap [E_m]_{2\delta_m}) = \mathcal{F}(K_m)$

$\forall F \in W$, take $G \in L^1(\mathcal{F}[E_m]_{\delta_m})$ $\mathbb{E}\|F - G\| \leq \frac{\varepsilon_m^2}{\|T_{m-1}\|}$ et $\mathbb{E}\|T_m F - T_{m-1} F\| \leq \mathbb{E}\|T_m F - T_m G\| + \mathbb{E}\|T_m F - T_{m-1} G\|$

$T_m(G) = T_{m-1} G$ $\quad \leq (1 + \|S_m\|)\mathbb{E}\|T_{m-1} F - T_{m-1} G\|$

$\leq \frac{1}{\varepsilon_m} \times \|T_{m-1}\| \, \|F - G\| \leq \frac{1}{\varepsilon_m} \times \varepsilon_m^2 \frac{\|T_{m-1}\|}{\|T_{m-1}\|}$

⊛ $K := \bigcap_{m \geq 0} K_m$ est précompact (totally bounded) et fermé dans M complet

Donc K est compact.

La suite $(T_m(F))_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, $\forall F \in W$, donc converge vers un certain $T(F) \in L^1(\mathcal{F}(M))$

On a donc $T : W \longrightarrow \bigcap_{m=1}^{+\infty} L_1(\mathcal{F}(K_m)) = L_1(\mathcal{F}(K))$ car $\bigcap_{m=1}^{+\infty} \mathcal{F}(K_m) = \mathcal{F}\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} K_m\right)$.

⊛ Pettis' measurability theorem.

$\mathbb{E}(\|F - T_m F\|) \leq \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}(\|T_n F - T_{n-1} F\|) < \varepsilon$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\|F - TF\|) \leq \varepsilon$

De même $\mathbb{E}(\|TF - T_m F\|) \leq \underbrace{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \varepsilon_k}_{\leq \varepsilon_m}$, $\forall m$ ∎

Théorème : $\mathcal{F}(M) \in (RNP) \iff \mathcal{F}(K) \in (RNP)$, $\forall K \subset M$ compact.

Preuve : "$\Rightarrow$" Obvious

"$\Leftarrow$". OPS M borné

Supposons que $\mathcal{F}(M) \notin (RNP)$

Alors il existe une martingale unif int $(M_n) \subset L^1(\mathcal{F}(M))$ telle que (M_n) ne cv pas.

$\exists \delta > 0$, $\limsup\limits_{n,m} \|M_n - M_m\|_{L^1} > \delta$

Or, par les propositions précédentes avec $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$, il existe $K \subset M$ compact, $T_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ et $T : (M_n)_n \to L^1(\mathcal{F}(K))$ tels que

$$(*) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|M_n - T(M_n)\|_{L^1(\mathcal{F}(M))} \leq \frac{\delta}{4} \quad \underset{(**)}{\text{et}} \quad \lim_{k \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_k(M_n) - T(M_n)\|_{L^1(\mathcal{F}(M))} = 0$$

Fait : $(T(M_n))$ est une martingale.

En effet, si (M_n) est adapté à $(\mathcal{F}_n)_n$, on a alors

$$\mathbb{E}(T(M_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{E}(T_k(M_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n) = \lim_{k \to +\infty} T_k \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)$$

$$T_k(M_n) \to T(M_n) \qquad = \lim_{k \to +\infty} T_k M_n = T(M_n).$$

Or $(T(M_n))$ est $L^1(\mathcal{F}(K))$ - borné grâce à $(*)$

De plus $\forall k$; $(T_k(M_n))_{n=0}^{\infty}$ est uniformément intégrable, $\forall k$ (T_k borné)

Puis $(**) \Rightarrow (T(M_n))$ est $L_1(\mathcal{F}(K))$ unif int.

Mais $\limsup\limits_{n,m} \|T(M_n) - T(M_m)\|_{L^1(\mathcal{F}(K))} > \frac{\delta}{2}$

Donc $\mathcal{F}(K) \notin (RNP)$ $\square$