ALGÈBRE

UFR Sciences et Techniques de Besançon

Starter S.T. 2018 – 2019

Mis à jour : 05/10/2018

Marine ROUGNANT
marine.rougnant@univ-fcomte.fr

Colin PETITJEAN
colin.petitjean@univ-fcomte.fr

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ENSEMBLES

1.1. Un peu de logique

Bien que la logique ne soit pas au programme de cette unité, elle est le ciment de tout raisonnement mathématique. Cette première section a pour but de donner les définitions et notations indispensables pour une bonne compréhension de ce manuel de cours.

Une **proposition** est un énoncé dont on peut dire sans ambiguïté s'il est vrai ou faux. On peut définir de nouvelles propositions à partir d'une ou plusieurs proposition(s) de départ grâce à ce qu'on appelle les **connecteurs logiques**. On se donne deux propositions P et Q.

- On appelle **négation de** P, notée "non(P)", la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et qui est fausse lorsque P est vraie.
  Exemple : La négation de P : "$3 \leqslant 2$" est non(P) : "$3 > 2$".

- On appelle **disjonction de** P **et** Q, notée "P ou Q", la proposition vraie si et seulement si au moins une des propositions P et Q est vraie. Attention : le "ou" en logique est inclusif !
  Exemple : $x \leqslant 4$ ou $x^2 \geqslant 1$.

- On appelle **conjonction de** P **et** Q, notée "P et Q", la proposition vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraie.
  Exemple : $2 < 3$ et 3 est un nombre pair.

- L'**implication** de Q par P, notée "$P \implies Q$", est la proposition "non(P) ou Q". Elle n'est fausse que lorsque P est vraie et Q est fausse.
  Exemple : $z = i \implies z^2 = -1$.

- L'**équivalence** entre les proposition P et Q, notée "$P \iff Q$", est vraie si est seulement si les deux propositions sont vraies ou si les deux propositions sont fausses. La proposition "$P \iff Q$" est la conjonction des propositions "$P \implies Q$" et "$Q \implies P$".
  Exemple : $x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$.

On notera également les quatre équivalences suivantes, souvent utiles :

$$\begin{aligned}
\big(P \implies Q\big) &\iff \big(\text{non}Q \implies \text{non}(P)\big)\\
\text{non}\big(P \implies Q\big) &\iff \big(P \text{ et non}(Q)\big)\\
\text{non}(P \text{ ou } Q) &\iff \text{non}(P) \text{ et non}(Q)\\
\text{non}(P \text{ et } Q) &\iff \text{non}(P) \text{ ou non}(Q)
\end{aligned}$$

1.2. Ensembles et éléments

Des objets ou des éléments possédant une ou plusieurs propriété(s) commune(s) constituent un **ensemble** (ou **collection**). Si a est un élément appartenant à un ensemble E, on note $a \in E$; si l'élément b n'appartient pas à l'ensemble E, on note $b \notin E$.

Un ensemble peut être décrit de plusieurs façons :

– S'il est défini uniquement par une propriété commune à tous ses éléments, on donne juste cette propriété.
  Exemples : l'ensemble des formes géométriques à 10 côtés, l'ensemble des étudiants de L1 ST possédant un lapin nain.

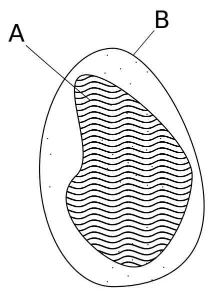
– Si c'est un ensemble connu qui porte un "nom", on utilise ce "nom".
  Exemples : l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$ ou les ensembles de nombres : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

– Si c'est un intervalle, ou un ensemble contruit à partir d'intervalles (cf. opérations sur les ensembles), on utilise la notation standard pour les intervalles.
  Exemples : $[0,1]$, $]-5,a]$, $[3,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$.

– Si c'est un ensemble fini, on peut donner la liste de ses éléments entre accolades.
  Exemples : $\{2\}$, $\{1,a,\star\}$, $\{1,2,\dots,n\}$.

– Si on le définit comme une partie d'un ensemble connu, on donne entre accolades l'ensemble de départ et la propriété servant à définir la partie, séparés par une barre verticale (la barre verticale se lit "tel que").
  Exemples : $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant 5\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$.

On se donne A et B deux ensembles. On dit que l'ensemble A est **inclus**, ou **contenu**, dans l'ensemble B, et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est aussi un élément de B. On dit alors que A est une **partie** ou un **sous-ensemble** de B.



★ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$(A \subset B) \iff (x \in A \implies x \in B)$$

Exemples :

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
2. L'ensemble des nombres premiers est un sous-ensemble de l'ensemble des entiers naturels.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 1.2.1. — 1. Tout ensemble E admet deux sous-ensembles triviaux : lui-même et l'ensemble vide.
2. Attention à ne pas confondre les symboles "$\subset$" et "$\in$" ! Par exemple, "$a \in \{a,b,c\}$" et "$\{a\} \subset \{a,b,c\}$" sont deux assertions correctes, mais "$\{a\} \in \{a,b,c\}$" et "$a \subset \{a,b,c\}$" n'ont aucun sens.

On dit que deux ensembles A et B sont **égaux**, et on note $A = B$, lorsque A est une partie de B <u>et</u> B est une partie de A.

★ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$(A = B) \iff (x \in A \iff x \in B)$$

Exemples :

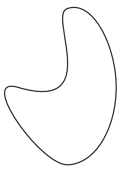
1. $\{a, 1, \psi, \clubsuit\} = \{1, \clubsuit, \psi, a\}$,
2. $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \geqslant 0\}$.

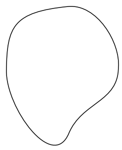
Remarque 1.2.2. — Lorsqu'on souhaite montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède généralement par double inclusion : on montre d'abord que A est une partie de B, puis que B est un sous-ensemble de A.

1.3. Opérations sur les ensembles

La donnée d'au moins deux ensembles permet d'en définir de nouveaux via des opérations sur les ensembles. Dans ce qui suit, chacune des opérations est définie pour deux ensembles. On peut naturellement étendre ces constructions à plus de deux ensembles.

Soient A, B et E trois ensembles. Les définitions seront illustrées par des schémas dans lesquels les ensembles A, B et E seront représentés par les formes :

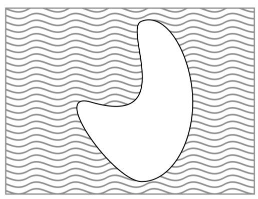

A


B


E

Le nouvel ensemble défini par opération sera la forme hachurée.

Le complémentaire. — On considère un ensemble E et une partie A de E. Le **complémentaire de A dans E** est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $E \backslash A$ (qui se lit "E privé de A") ou $\complement_E A$ (qui se lit "complémentaire de A dans E), ou encore A^c (qui se lit "A complémentaire") lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.



★ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$(x \in E \backslash A) \iff (x \in E \text{ et } x \notin A)$$

Exemples :

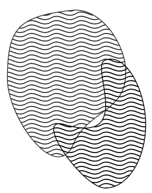
1. $\complement_{\mathbb{C}} \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$,
2. $[0, 5] \backslash [0, 2[= [2, 5]$,
3. $\{a, 1, \psi, \clubsuit\} \backslash \{\psi\} = \{a, 1, \clubsuit\}$.
4. Le complémentaire de l'ensemble des entiers pairs est l'ensemble des entiers impairs.

Remarque 1.3.1. — 1. Pour tout ensemble E, on a : $E \backslash E = \emptyset$ et $E \backslash \emptyset = E$.

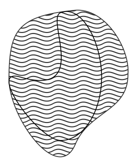
2. Pour toute partie A d'un ensemble E, on a : $(A^c)^c = A$.
   ⋆ *Pour aller plus loin : la preuve.*
   Soit $x \in E$. Alors :

$$x \in (A^c)^c \iff x \notin A^c \iff \mathrm{non}(x \in A^c) \iff \mathrm{non}(x \notin A)) \iff x \in A.$$

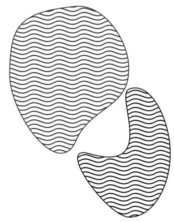
La réunion. — La **réunion**, ou l'**union**, de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B ou aux deux ensembles à la fois. On le note $A \cup B$ (qui se lit "A union B").



Cas générique



Lorsque A est inclus dans B



Lorsque A et B n'ont aucun point en commun

⋆ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

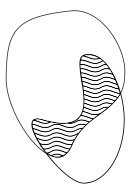
$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Remarque 1.3.2. — Si A est une partie de B, alors les ensembles $A \cup B$ et B sont égaux !

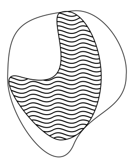
Exemples :

1. $]-\infty, 5[\cup]-1, +\infty[= \mathbb{R}$.
2. $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{2k+1\}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs.

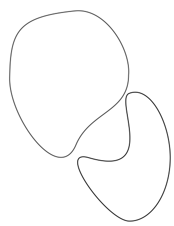
L'intersection. — L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B. On note cet ensemble $A \cap B$ (qui se lit "A inter B").



Cas générique



Lorsque A est inclus dans B



Lorsque A et B n'ont aucun point en commun

⋆ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

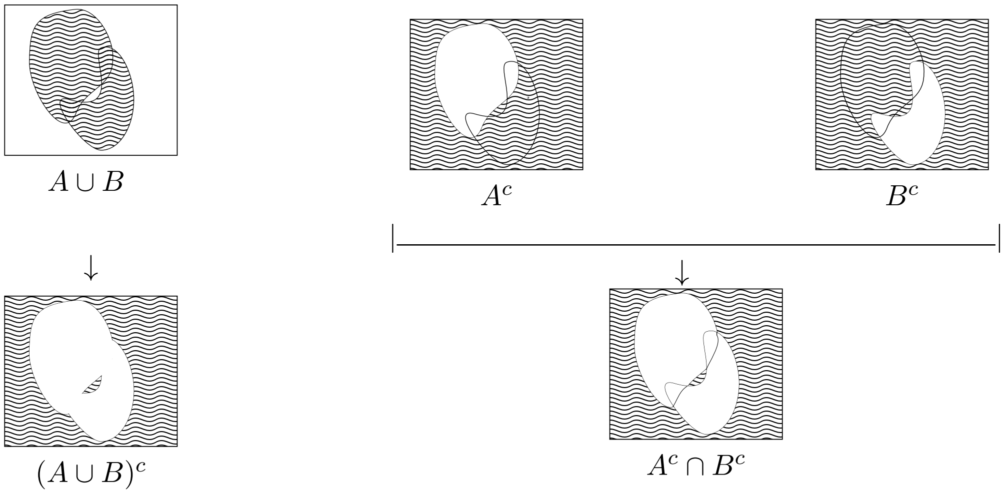
Remarque 1.3.3. — 1. Si A est une partie de B, alors les ensembles $A \cap B$ et A sont égaux.
2. Si A et B n'ont aucun élément en commun, alors les ensembles $A \cap B$ et $\emptyset$ sont égaux.

Exemples :

1. $\{a, 1, \psi, \clubsuit\} \cap \{b, \psi, \clubsuit, 2, A\} = \{\psi, \clubsuit\}$.
2. $(]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[)\cap]-5, 5] =]-5, -2[\cup]1, 5]$.

Proposition 1.3.4. — *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Les ensembles $(A \cup B)^c$ et $A^c \cap B^c$ sont égaux.*

Démonstration. —



⋆ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*
Soit $x \in E$. Alors :

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\
&\iff \text{non}(x \in A \cup B) \\
&\iff \text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B) \\
&\iff \text{non}(x \in A) \text{ et non}(x \in B) \\
&\iff x \in A^c \text{ et } x \in B^c \\
&\iff x \in A^c \cap B^c
\end{aligned}
$$

□

Proposition 1.3.5. — *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Les ensembles $(A \cap B)^c$ et $A^c \cup B^c$ sont égaux.*

Démonstration. — Laissée en exercice. □

Le produit cartésien. — On appelle **couple** la donnée de deux objets x et y dans un certain ordre. On note (x, y). Les objets x et y sont appelées **coordonnées** du couple (x, y). Deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux lorsque leurs coordonnées sont deux à deux égales, c'est-à-dire lorsque x et x' sont égaux et si y et y' sont égaux.
Si E et F sont deux ensembles, on définit le **produit cartésien** de E par F, noté $E \times F$, comme l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $x \in E$ et $y \in F$.

⋆ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$E \times F = \{(a, b) \mid a \in E \text{ et } b \in F\}$$

Pour $(x, y), (x', y') \in E \times F$, on a : $[(x, y) = (x', y')] \iff [x = x' \text{ et } y = y']$.

Exemples :

1. $\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
2. Le plan, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (qu'on note généralement $\mathbb{R}^2$).
3. $[-90, 90] \times [-180, 180]$ (coordonnées GPS)

Pour n un entier supérieur ou égal à 2, on peut définir de la même manière le produit cartésien de n ensembles $E_1, \dots, E_n$: on appelle **n-uplet** d'objets la donnée d'une liste ordonnée $x_1, \dots, x_n$ de n objets ; on le note $(x_1, \dots, x_n)$. Le produit cartésien $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ avec, pour tout rang i, $x_i \in E_i$.

1.4. Un exemple important : l'ensemble des parties d'un ensemble

On se donne un ensemble E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'**ensemble des parties de** E : c'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc des ensembles, attention à bien distinguer les parties de $\mathcal{P}(E)$ (qui sont des ensembles de parties de E) et les parties de E (qui sont des ensembles d'éléments de E) !

Remarque 1.4.1. — Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$, donc l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient au moins deux éléments : E et $\emptyset$.

Exemples :

1. Si $E = \{(-1, 1)\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{(-1, 1)\}\}$.
2. Si $E = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$.

★ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$\begin{aligned} (X \in \mathcal{P}(E)) &\iff (X \subset E) \\ &\iff (x \in X \implies x \in E) \end{aligned}$$

1.5. Quantificateurs

Souvent, on définit un ensemble comme une partie d'un ensemble de référence dont les éléments vérifient une propriété commune. Cette propriété peut être décrite par une expression "littéraire", comme par exemple :

Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) du plan dont les coordonnées vérifient la condition "$f(x) = y$"

Cette proposition peut également être écrite symboliquement :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, f(x) = y\}.$$

Ici, la proposition "$f(x) = y$" est très simple, passer de son écriture "littéraire" à son écriture symbolique est immédiat. Mais comment faire pour écrire symboliquement la proposition "n est un entier pair" ? Il est nécessaire d'utiliser un quantificateur. Il existe trois quantificateurs :

1. $\forall$, qui signifie "pour tout", ou "quelque soit".
   Exemple : La fonction cosinus est minorée par -1 et majorée par 1 :
   $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

2. $\exists$, qui signifie "il existe".
   Exemple : n est pair : $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$.

3. $\exists!$, qui signifie "il existe un unique".
   Exemple : L'équation $x^3 = 2$ admet une unique solution réelle : $\exists! x \in \mathbb{R}, x^3 = 2$.

Ces quantificateurs permettent d'écrire des propositions, il est donc important de s'interroger sur leur comportement lorsqu'on utilise également des connecteurs logiques et en particulier la négation. On se donne $P(x)$ une proposition qui dépend de x. On a alors les équivalences :

$$\text{non}\,(\forall x \in E, P(x)) \iff [\exists x \in E, \text{non}(P(x))]$$

$$\text{non}\,(\exists x \in E, P(x)) \iff [\forall x \in E, \text{non}(P(x))]$$

Exemple : La négation de la proposition "tout réel peut être majoré par un entier" est "il existe un réel plus grand que tous les entiers". En effet :

$$\begin{aligned}
\text{non}\,(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y > x) \quad &\iff \quad \exists x \in E, \text{non}\,(\exists y \in \mathbb{Z}, y > x) \\
&\iff \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z},\ \text{non}(y > x) \\
&\iff \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z},\ y \leqslant x
\end{aligned}$$

Travaux dirigés 1 d'algèbre :

Ensembles

Exercice 1

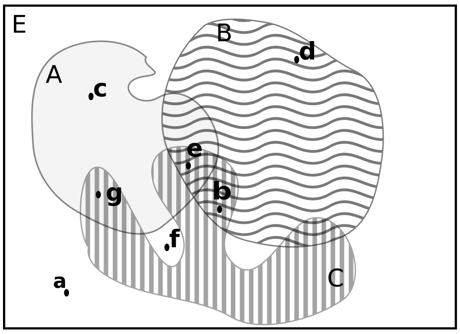
Remplacer les pointillés par $\in$ ou par $\subset$

$1 \ldots\ldots\{1,2\}$ $\quad$ $1\ldots\ldots\mathbb{N}$ $\quad$ $\{1,2\}\ldots\ldots\{1,2,3\}$ $\quad$ $\mathbb{N}\ldots\ldots\mathbb{N}$ $\quad$ $\{1\}\ldots\ldots\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{N}\ldots\ldots\mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\quad$ $\{1\}\ldots\ldots\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Exercice 2

On considère un ensemble E et trois de ses parties A, B et C.

1. Décider à partir du schéma ci-dessous si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
   (a) $g \in A \cap \overline{B}$ (c) $e \in \overline{(A \cap B)} \cup C$ (e) $d \in \overline{A} \cup B$
   (b) $c \in \overline{B} \cup \overline{C}$ (d) $d \in \overline{A \cup B}$ (f) $d \in A \cup \overline{B}$
2. Dire quel(s) élément(s) parmi les éléments a, b, c, d, e, f, g appartiennent à chacun des ensembles suivants :
   (a) $\overline{A \cap B \cap C}$ (c) $\overline{A} \cap B$ (e) $(A \cup B) \cap \overline{C}$
   (b) $\overline{A \cup B \cup C}$ (d) $(A \cup B) \cap C$ (f) $\overline{(A \cup B)} \cap C$



Exercice 3

On considère les ensembles : $E = \{1,2,3,4\}$, $F = \mathbb{N}^*$, $I = [-5, 0[$, $J = [-1, 3]$, $K =]0, 1[$, $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Déterminer les ensembles :

1. $E \cap F$
2. $E \cup F$
3. $X \backslash E$
4. $I \cup J$
5. $I \cap K$
6. $\mathbb{R} \backslash I$
7. $X \cap I$
8. $K \cap F$

Exercice 4

Pour chacune des propositions suivantes, déterminer le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (maximal) pour lequel la proposition est vraie, donner le complémentaire de cet ensemble dans $\mathbb{R}$ et déduire la négation de la proposition.

1. "$x > 0$ *ou* $x < 1$"
2. "$x > 0$ *et* $x < 1$"
3. "$x^2 > 0$"
4. "$x^2 \geqslant 1$ *ou* $x < 1$"
5. "$x > 1 \Longrightarrow x^2 \geqslant 1$"
6. "$-1 \leqslant x \leqslant 2$ *et* $e^x < 1$"

Exercice 5

Soient $p(x)$, $q(x, y)$ et $r(y)$ les propositions suivantes :

$$p(x) : -1 < x < 1, \;\; q(x, y) : x < y, \;\; r(y) : y^2 > 4$$

Dessiner les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{non } r(y)\}$
2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, q(x, y)\}$
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, p(x) \text{ et } q(x, y)\}$
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{non } p(x) \text{ et } q(x, y)\}$
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, p(x) \text{ ou } r(y)\}$
6. $E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, q(x, y) \text{ et } r(y)\}$

Exercice 6

1. Écrire les éléments de $\mathcal{P}(E)$ dans les cas où $E = \{a\}$ puis $E = \{a, b\}$ puis $E = \{a, b, c\}$.
2. Soit E un ensemble a n éléments. Combien $\mathcal{P}(E)$ possède-t'il d'éléments ?

Exercice 7

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble X.

1. Montrer les propositions suivantes :
   (a) $A \cup A = A \cap A = A$
   (b) $A \cup \emptyset = A$
   (c) $A \cap \emptyset = \emptyset$
   (d) $(A^c)^c = A$
   (e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   (f) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   (g) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   (h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. En déduire que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 8

Montrer les propositions suivantes :

1. $A = A \cap B \implies A \subset B$
2. $A = A \cup B \implies B \subset A$
3. $A \subset B \iff B^c \subset A^c$
4. $A \subset B \implies \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$. Que pensez-vous de la réciproque ?
5. $A \cap B = A \cup B \implies A = B$

Exercice 9

1. Écrire les éléments de $\{a, b\} \times \{0, 1, 2\}$.
2. Représenter les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :
   (a) $[-1, 1] \times (]0, 1] \cup [2, 3])$ (b) $\mathbb{R}^2 \backslash (]-1, 0[\times [1, 2])$ (c) $(\mathbb{R} \backslash [0, 1]) \times (]-1, 1] \cap [0, 3[)$

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Écrire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée.
5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend toutes les valeurs entières comprises entre -5 et 5.

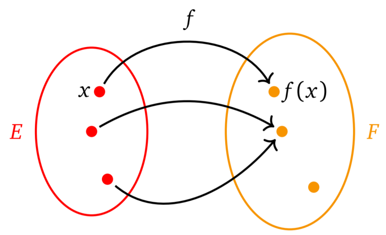
CHAPITRE 2

APPLICATIONS

Après avoir abordé les ensembles, nous passons maintenant à l'étude d'objets Mathématiques qui permettent de passer d'un ensemble à un autre : les fonctions et les applications. Ces objets sont d'excellents outils pour comparer les ensembles.

2.1. Fonctions

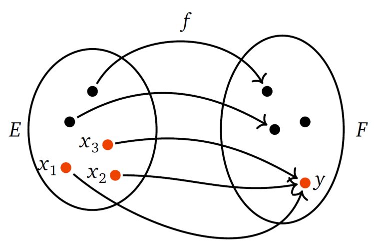
Définition 2.1.1. — Soient E et F deux ensembles. Une **fonction** f de E dans F est une relation pour laquelle chaque élément x de E est relié à au plus un élément $f(x)$ de F.



On note alors $f : E \to F$, ou $x \in E \mapsto f(x) \in F$, ou encore :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- On dit que E est **l'ensemble de départ** de la fonction f et que F est **son ensemble d'arrivée**.
- Si on se donne $x \in E$, on dit que $f(x) \in F$ est **l'image** de x par la fonction f. Il est important de remarquer, que par définition d'une fonction, x admet **au plus une** image par f. En particulier, il est possible que x n'aie pas d'image par la fonction f.
- Maintenant si l'on se donne $y \in F$, on dit que $x \in E$ est **un antécédent** de $y \in F$ dès lors que $f(x) = y$. Ici il est important de remarquer qu'il n'y pas nécessairement unicité de l'antécédent : deux points différents de E peuvent être envoyés sur le même point de F par la fonction f (voir le dessin ci-dessous ainsi que les exemples 2. et 3. qui suivent).



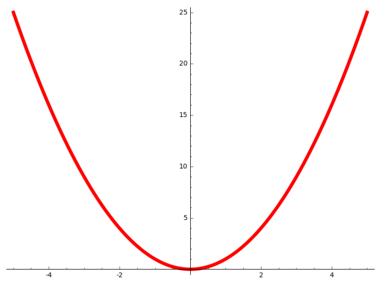
Exemples :

1. Soient $E = \{\text{Angleterre, Belgique, Croatie, France}\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Les relations suivantes définissent une fonction dont l'ensemble de départ est E et l'ensemble d'arrivée est F :

$$\begin{array}{rcl} f(\text{France}) & = & 1 \\ f(\text{Croatie}) & = & 2 \\ f(\text{Belgique}) & = & 3 \\ f(\text{Angleterre}) & = & 4. \end{array}$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) = x^2$ définie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ici $\mathbb{R}$ est l'ensemble de départ de la fonction f mais également son ensemble d'arrivée. On peut représenter la fonction f par son graphe (voir le cours d'Analyse) :

   On peut remarquer que $f(2) = 2^2 = 4$ et $f(-2) = (-2)^2 = 4$, i.e. l'image de 2 est 4 et l'image de -2 est 4 également. Ainsi, 4 possède au moins deux antécédents par la fonction f : 2 et -2. Il est en fait possible de montrer en dressant un tableau de variation de la fonction f que 2 et -2 sont les seuls antécédents de 4. Il est intéressant de remarquer que -1 ne possède pas d'antécédent par f.



3. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Les relations $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ et $f(4) = b$ définissent une fonction f de E dans F. Il est possible de représenter la fonction f de la manière suivante.

$$\begin{array}{ccccc} c & & & \bullet & \\ b & & \bullet & & \bullet \\ a & \bullet & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

   On remarque que b possède deux antécédents : 2 et 4.

4. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Les relations $f(1) = a$, $f(2) = b$, et $f(4) = b$ définissent une fonction de E dans F.

$$\begin{array}{ccccc} c & & & & \\ b & & \bullet & & \bullet \\ a & \bullet & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

   On remarquera que c ne possède pas d'antécédent, et que 3 ne possède pas d'image.

5. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Les relations $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = b$ et $f(1) = b$ ne définissent **pas une fonction** de E dans F puisque l'élément 1 de E est relié à deux éléments de F (i.e. 1 possède deux images).

$$\begin{array}{ccccc} c & \bullet & & \bullet & \\ b & & \bullet & & \bullet \\ a & \bullet & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

2.1.1. Ensemble de définition. —

> ***Définition 2.1.2.*** — Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. On définit alors **l'ensemble de définition** de f comme étant le sous ensemble de E formé par les éléments qui admettent une image par f. Autrement dit, ce sont les éléments x de E tels que $f(x)$ existe. On note souvent D_f l'ensemble de définition de f :
> $$D_f = \{x \in E \,|\, \exists y \in F, y = f(x)\}.$$

Exemples :

1. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{a, b, c\}$ et $f : E \to F$ la fonction définie par $f(1) = a$, $f(2) = b$, et $f(4) = b$.

$$\begin{array}{ccccc} c & & & & \\ b & & \bullet & & \bullet \\ a & \bullet & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

   L'ensemble de définition de f est $D_f = \{1, 2, 4\}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la relation $f(x) = \sqrt{x}$. L'ensemble de définition de f est alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la relation $f(x) = \ln(-x^2+1)$. Étudions l'ensemble de définition de f. Premièrement, on sait que l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Par conséquent, la fonction f est définie en x dès que $-x^2 + 1 > 0$. Or, en calculant le discriminant du polynôme du second degré $-x^2 + 1$ (ou plus simplement en repérant une identité remarquable), on peut déterminer les racines de ce polynôme : -1 et 1. Comme le coefficient devant x^2 est négatif, $-x^2 + 1$ est strictement positif dans l'intervalle défini par les deux racines : $]-1, 1[$. On en déduit alors $D_f =]-1, 1[$.

2.1.2. Restriction d'une fonction à un sous ensemble. —

> ***Définition 2.1.3.*** — Soient E, F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une fonction. Pour un sous ensemble A de E, c'est-à-dire pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit **la restriction de f à A** comme suit :
> $$\begin{aligned} f_{|A} : A &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

En d'autres termes, la fonction $f_{|A}$ est donc une fonction de A dans F qui coïncide avec f sur tous les éléments de A.

⋆ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$\forall x \in A \,,\, f_{|A}(x) = f(x).$$

On termine cette partie avec une définition assez naturelle.

> ***Définition 2.1.4.*** — Soient E, F deux ensembles, et f, g deux fonctions de E dans F. On dit alors que les fonctions f et g **sont égales**, et on note $f = g$, si ces deux fonctions ont même ensemble de définition $D = D_f = D_g$ et si pour tout $x \in D$: $f(x) = g(x)$.

Remarque 2.1.5. — L'ensemble de départ considéré joue un rôle très important. Supposons que l'ensemble de départ soit $E = \mathbb{R}_+$. Alors les fonctions définies sur E par $f(x) = x$ et $g(x) = |x|$ sont égales. En revanche si on considère $E = \mathbb{R}$ comme ensemble de départ, les fonctions considérées ne sont pas égales.

2.2. Applications

Il y a souvent confusion entre les termes “fonction” et “application”. Il semble qu’en règle générale, le terme fonction est plus souvent utilisé en analyse et celui d’application est préféré en algèbre. En fait, il ne s’agit pas du même objet.

Définition 2.2.1. — On considère deux ensembles E et F. **Une application** f de E dans F est une relation pour laquelle chaque élément x de E est associé à exactement un élément $f(x)$ de F. En particulier, une application f de E dans F est une fonction dont l’ensemble de définition est E tout entier. Nous utilisons donc les notations ainsi que le vocabulaire des fonctions pour parler des applications.

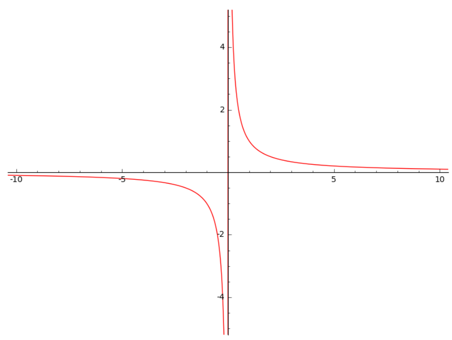
★ *Pour aller plus loin : l’écriture symbolique.*
Une relation f entre deux ensembles E et F définie une application si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F \ : \ y = f(x).$$

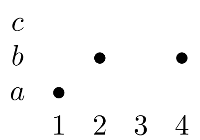
Remarque 2.2.2. — A ce point, il est important de souligner la différence entre fonction et application. Pour **une fonction** f, chaque élément de l’ensemble de départ admet **au plus** une image par f. En particulier, il peut arriver qu’un élément n’admette pas d’image par f, c’est-à-dire que la fonction f n’est pas définie en ce point. En revanche, pour **une application**, chaque élément de l’ensemble de départ admet **exactement** une image par f.

Nous illustrons maintenant cette différence par quelques exemples simples.
Exemples :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) = \frac{1}{x}$ définie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   En revanche, il ne s’agit pas d’une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En fait, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ (il s’agit simplement de s’assurer que le dénominateur x ne s’annule pas). Ainsi la relation $f(x) = \frac{1}{x}$ définie une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. Voici une réprésentation graphique de cette fonction :



2. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{a, b, c\}$, les relations $f(1) = a$, $f(2) = b$, et $f(4) = b$ ne suffisent pas pour définir une application de E dans F puisque l’élément 3 de E n’est relié à aucun élément de F. En revanche, ces relations définissent une application f de l’ensemble $\{1, 2, 4\}$ (qui est un sous ensemble de E) dans F.



Remarque 2.2.3. — Si $f : E \to F$ est une fonction de domaine de définition $D_f \subset E$, alors la restriction de f à son domaine de définition $f_{|D_f} : D_f \to F$ est une application.

2.2.1. Compositions d'applications. —

Définition 2.2.4. — On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : G \to H$. Si $F \subset G$, alors on définit **l'application composée** de g et f par la formule suivante :

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & H \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

La notation $g \circ f$ se lit g "rond" f, et on dit parfois g composé avec f.

Il est important de remarquer que la condition $F \subset G$ est en particulier vérifiée lorsque $F = G$. Autrement dit, lorsque l'ensemble d'arrivée de l'application f est le même que l'ensemble de départ de l'application g. On peut schématiser la composition de deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Exemples :

1. Soient $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ et $g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ les applications définies par les relations suivantes :

$$\begin{array}{llll} f(1) = d & f(3) = a & g(a) = 3 & g(c) = 4 \\ f(2) = b & f(4) = c & g(b) = 2 & g(d) = 1. \end{array}$$

   Comme l'ensemble d'arrivée de f est égal à l'ensemble de départ de g, l'application $g \circ f$ est bien définie. De plus, on laisse soin au lecteur de vérifier l'égalité suivante : pour tout $x \in \{1, 2, 3, 4\}$, $g \circ f(x) = x$.

2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 3x$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Ici l'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$ alors que l'ensemble de départ de g est $\mathbb{R}_+$. Comme $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R}_+$, l'application $g \circ f$ n'a pas de sens pour les applications f et g ainsi définies. En revanche, la fonction $x \mapsto \sqrt{3x}$ existe et son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$. On peut alors écrire l'application $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{3x} \in \mathbb{R}$ comme la composition $A \circ B$ des applications $A : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 3x \in \mathbb{R}_+$ et $B : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

2.2.2. Quelques applications remarquables. —

Définition 2.2.5. — Soit E un ensemble. **L'application identité de** E, souvent notée Id_E, est définie par :

$$\begin{array}{rcl} Id_E : E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Proposition 2.2.6. — *Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors :*

$$f \circ Id_E = f \text{ et } Id_F \circ f = f.$$

★ *Pour aller plus loin :*

Démonstration. — Nous démontrons uniquement l'égalité $f \circ Id_E = f$, l'autre se démontrant de la même manière. Par définition, deux applications sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ et si elles coïncident sur cet ensemble. Dans notre cas, $f \circ Id_E$ et f sont deux applications définies sur E. Il reste donc simplement à démontrer que pour tout

$x \in E : f \circ Id_E(x) = f(x)$. Soit donc un tel $x \in E$, on a par définition de la composition $f \circ Id_E(x) = f(Id_E(x))$. Or $Id_E(x) = x$. Donc $f \circ Id_E(x) = f(Id_E(x)) = f(x)$, ce qui est exactement ce que l'on voulait démontrer. $\square$

Définition 2.2.7. — Soit E un ensemble et A une partie de E. Alors on définit **l'application indicatrice** de A comme suit :

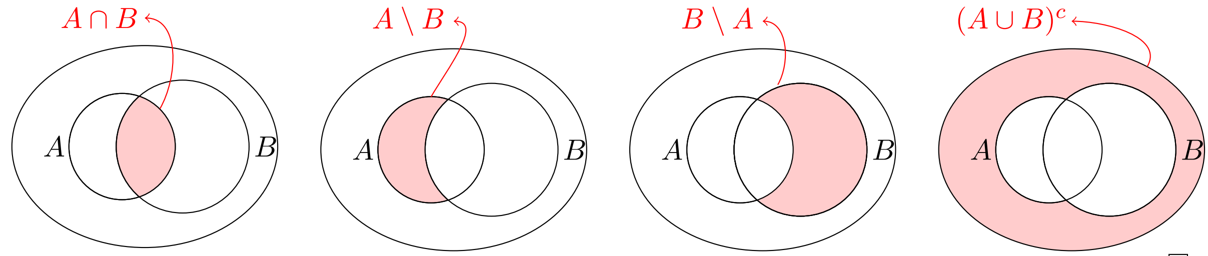
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Proposition 2.2.8. — *Soient E un ensemble et A, B deux sous ensembles de E. On alors pour tout $x \in E$:*

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x).$$

Démonstration. — Pour démontrer cette égalité, nous allons distinguer différents cas qui correspondent aux différentes valeurs que prennent les applications indicatrices. On laisse alors au lecteur le soin de vérifier que l'égalité souhaitée est toujours vérifiée.

Si $x \in A \cap B$, alors :	Si $x \in A \setminus B$, alors :	Si $x \in B \setminus A$, alors :	Si $x \in (A \cup B)^c$, alors :
$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0$
$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_A(x) = 1$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$	$\mathbb{1}_A(x) = 0$
$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$	$\mathbb{1}_B(x) = 1$	$\mathbb{1}_B(x) = 0$
$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$	$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$



$\square$

2.3. Image directe et image réciproque

2.3.1. Image directe d'un ensemble par une application. —

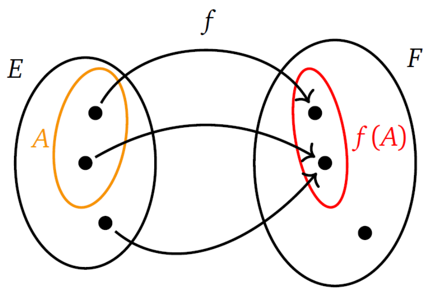
Définition 2.3.1. — Soient E, F deux ensembles et soit $A \subset E$. Pour une fonction $f : E \to F$, on définit **l'image directe de A par** f, notée $f(A)$, comme l'ensemble des images des éléments de A par f. Autrement dit :

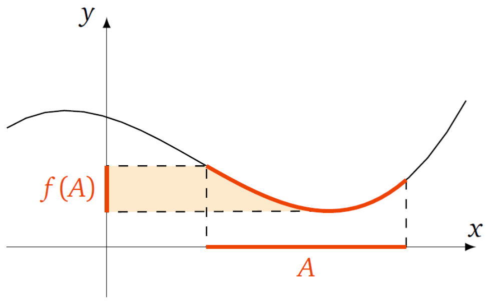
$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

$\star$ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

$$f(A) = \{y \in F \,|\, \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

On peut représenter l'image directe avec des "patates", mais on peut également l'illustrer pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

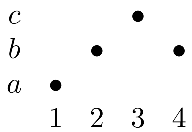




Remarque 2.3.2. — Pour $a \in E$, attention à ne pas confondre $f(a)$, qui est **un élément** de F, et $f(\{a\})$ qui est **l'ensemble** image de l'ensemble $\{a\} \subset E$. En fait, on a $f(\{a\}) = \{f(a)\}$.

Exemples :

1. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Soit l'application $f : E \to F$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ et $f(4) = b$.



On a par exemple $f(\{1\}) = \{a\}$, $f(\{1, 2\}) = \{a, b\}$ et $f(\{1, 3, 4\}) = \{a, b, c\} = F$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 2$. On souhaite déterminer $f(]0, 3])$. Pour cela, une méthode assez classique est de dresser un tableau de variation complet de la fonction f. On commence donc par étudier le signe de la dérivée f', qui dans notre cas a pour expression : $f'(x) = x^2 - 4$. Ici on remarque une identité remarquable qui nous permet de factoriser l'expression de f' : $f'(x) = (x - 2)(x + 2)$. Cette forme factorisée nous permet très simplement de dresser un tableau de signes de la dérivée, et donc d'en déduire les variations de f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$	$\frac{-22}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme nous souhaitons déterminer $f(]0, 3])$, nous complétons ce tableau avec les valeurs de $f(0)$ et de $f(3)$:

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$	-2	$\searrow$	$\frac{-22}{3}$	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, sur l'intervalle $]0, 3]$, l'application f décroît de la valeur -2 à $\frac{-22}{3}$, puis ensuite elle croît jusqu'à atteindre la valeur -5. Comme f est continue, on peut alors affirmer que :

$$f(]0, 3]) = \left[\frac{-22}{3}, -2\right[\cup \left[\frac{-22}{3}, -5\right] = \left[\frac{-22}{3}, -2\right[.$$

L'intervalle est ouvert en -2 puisque l'intervalle de départ $]0,3]$ est également ouvert en 0, et par conséquent la valeur -2 n'est jamais atteinte. C'est pourquoi $-2 \notin f(]0,3])$.

2.3.2. Image réciproque d'un ensemble par une application. —

Définition 2.3.3. — Soient E, F deux ensembles et soit $B \subset F$. Pour une fonction $f : E \to F$, on définit **l'image réciproque de B par f**, noté $f^{-1}(B)$, comme l'ensemble des antécédents des éléments de B par f. Autrement dit :

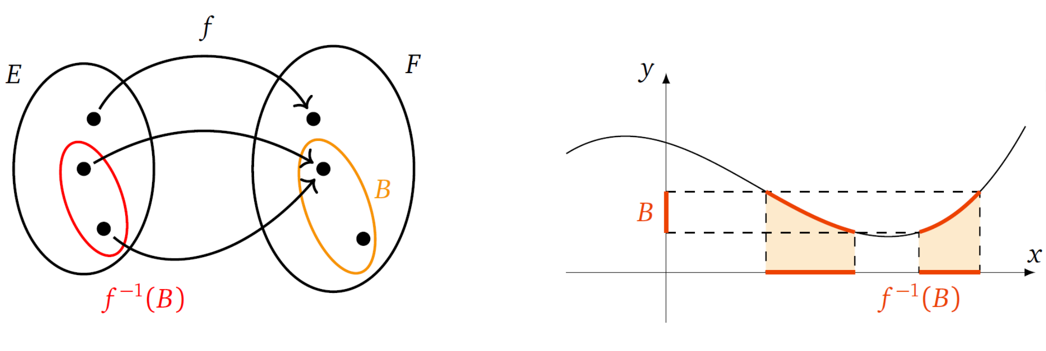
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Ainsi, par définition :

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

★ *Pour aller plus loin : l'écriture symbolique.*

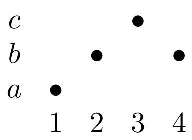
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, \exists y \in B, y = f(x)\}.$$



Remarque 2.3.4. — Attention, la notation f^{-1} est également utilisée pour décrire la fonction réciproque (ou inverse) étudiée en analyse. La fonction réciproque d'une fonction f n'existe pas toujours. En revanche l'image réciproque d'une partie B par une fonction f existe toujours.

Exemples :

1. Soient $E = \{1,2,3,4\}$ et $F = \{a,b,c\}$. Soit l'application $f : E \to F$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ et $f(4) = b$.



   On a par exemple $f^{-1}(\{a\}) = \{1\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \{2,4\}$ et $f^{-1}(\{a,b,c\}) = f^{-1}(F) = \{1,2,3,4\} = E$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = x^2$. On a $f^{-1}(\{4\}) = \{-2,2\}$. En effet, $x \in f^{-1}(\{4\})$ si et seulement si $f(x) = 4$, c'est-à-dire si et seulement si $x^2 = 4$. Il est alors aisé de montrer que les solutions de cette équation du second degré sont -2 et 2.

3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 2$. Cherchons à déterminer $f^{-1}([-2,+\infty[)$. Par définition, $x \in f^{-1}([-2,+\infty[)$ si et seulement si $f(x) \in [-2,+\infty[$. Autrement dit, $x \in f^{-1}([-2,+\infty[)$ si et seulement si $f(x) \geq 2$. Rappelons le tableau de variation de cette fonction que l'on a déterminé un peu plus haut :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$	-2	$\searrow$	$\frac{-22}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que $f(0) = -2$. De plus, par continuité et monotonie de la fonction sur les intervalles considérés, il existe un unique $x_1 \in]-\infty, -2]$ et un unique $x_2 \in [2, +\infty[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = -2$:

x	$-\infty$		x_1		-2		0		2		x_2		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$	-2	$\searrow$	$\frac{-22}{3}$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Nous allons maintenant déterminer les valeurs de x_1 et x_2. En fait, il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = -2$:

$$\begin{aligned} f(x) = -2 &\iff \frac{1}{3}x^3 - 4x - 2 = -2 \\ &\iff \frac{1}{3}x^3 - 4x = 0 \\ &\iff x(\frac{1}{3}x^2 - 4) = 0 \\ &\iff x(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12}) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -2\sqrt{3} \text{ ou } x = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Par conséquent $x_1 = -2\sqrt{3}$ et $x_2 = 2\sqrt{3}$. Pour en déduire $f^{-1}([-2, +\infty[)$, il suffit de lire sur le tableau de variation de f les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geq 2$. On en déduit :

$$f^{-1}([-2, +\infty[) = [-2\sqrt{3}, 0] \cup [2\sqrt{3}, +\infty[.$$

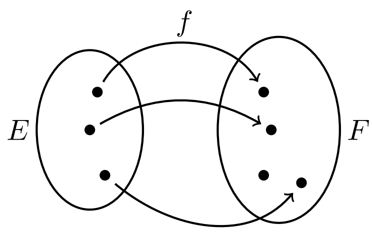
2.4. Applications injectives, surjectives et bijectives

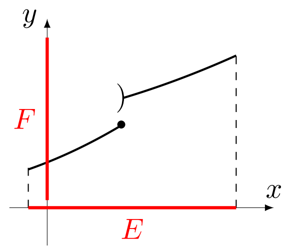
2.4.1. Applications injectives. —

> ***Définition 2.4.1* (Application injective ou injection).** — Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est **injective** si : Pour tout $x, x' \in E$ vérifiant $f(x) = f(x')$, alors on a nécessairement $x = x'$. Plus formellement, f est injective si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :
>
> 1. $\forall x, x' \in E,\ \big[f(x) = f(x')\big] \implies \big[x = x'\big]$.
> 2. $\forall x, x' \in E,\ \big[x \neq x'\big] \implies \big[f(x) \neq f(x')\big]$.
> 3. Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet **au plus** une solution. Autrement dit, chaque élément $y \in F$ admet **au plus** un antécédent.

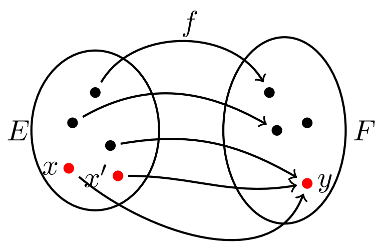
Dans la plupart des cas, pour démontrer qu'une application est injective on utilise plutôt l'assertion 1. ci-dessus. C'est-à-dire, on considère x et x' dans E vérifiant $f(x) = f(x')$, et on cherche à prouver que $x = x'$.

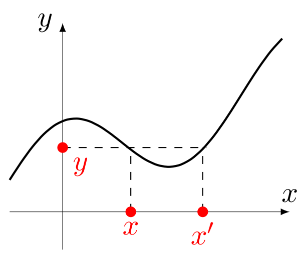
Voici la représentation de deux applications injectives :





Voici la représentation de deux applications non injectives :





Remarque 2.4.2 (**Attention !**) — L'ensemble de départ considéré est très important. Il peut arriver qu'une application $f : E \to F$ ne soit pas injective, mais qu'une restriction à un sous ensemble $f_{|E'} : E' \to F$ le soit.

Par exemple, l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas injective : $f(-2) = f(2) = 4$ et donc 4 possède deux antécédents. En revanche, l'application $f_{|\mathbb{R}_+} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est injective. En effet, si $y \geq 0$, il existe exactement une solution réelle positive de l'équation $y = x^2$, qui est $x = \sqrt{y}$. Et si $y < 0$, l'équation $y = x^2$ n'admet pas de solution.

Exemples :

1. L'application $f : n \in \mathbb{N} \mapsto n \in \mathbb{Z}$ est injective : $f(n) = f(m) \iff n = m$.
   En revanche, l'application $g : n \in \mathbb{Z} \mapsto |n| \in \mathbb{N}$ n'est pas injective. En effet, on a par exemple $g(2) = g(-2) = 2$, et donc 2 possède deux antécédents par la fonction g.

2. Soit E un ensemble, alors l'application $Id_E : x \in E \mapsto x \in E$ est injective.

3. L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est injective. Ceci peut se déduire facilement du théorème de la bijection. La fonction est continue et strictement croissante, c'est donc une bijection (voir le cours d'analyse).

   Dans le but de présenter un raisonnement par l'absurde, nous allons démontrer cette affirmation "à la main". Supposons que $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que $x^3 = y^3$. On cherche à démontrer que $x = y$.

   Premièrement, remarquons que si $x = 0$ alors $y^3 = x^3 = 0$, et donc nécessairement $y = 0 = x$. De même si $y = 0$, on obtient $x = 0 = y$.

   Supposons dorénavant que $xy \neq 0$. Nous allons travailler un peu sur l'expression suivante :

$$\begin{aligned} x^3 = y^3 &\iff x^3 - y^3 = 0 \\ &\iff (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \\ &\iff x - y = 0 \text{ ou } x^2 + xy + y^2 = 0 \end{aligned}$$

   Nous allons montrer que le deuxième cas, $x^2 + xy + y^2 = 0$, ne peut se produire. Ceci imposera que $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ce que l'on souhaite démontrer.

   Nous allons montrer par un raisonnement par l'absurde que $x^2 + xy + y^2 \neq 0$. Supposons que $x^2 + xy + y^2 = 0$. Nous allons une nouvelle fois distinguer deux cas :
   Si $xy > 0$, alors $x^2 + xy + y^2 > 0$. Or, ceci est absurde puisque on suppose que $x^2 + xy + y^2 = 0$.

Si $xy < 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 = 0 \quad &\iff \quad x^2 + 2xy + y^2 = xy \\ &\iff \quad (x+y)^2 = xy. \end{aligned}$$

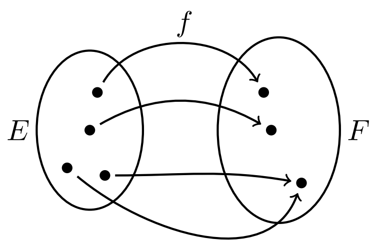
Or, cette dernière égalité est absurde puisque le terme de gauche est strictement positif et le terme de droite est strictement négatif. Par conséquent, l'hypothèse $x^2 + xy + y^2 = 0$ est fausse et donc $x^2 + xy + y^2 \neq 0$. $\square$

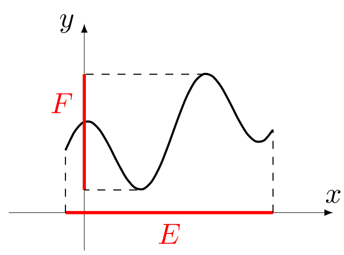
2.4.2. Applications surjectives. —

***Définition 2.4.3* (Application surjective ou surjection).** — Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Plus formellement, f est surjective si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

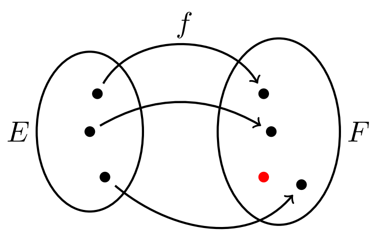
1. $\forall y \in F, \exists x \in E \, : \, y = f(x)$.
2. $f(E) = F$.
3. Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet **au moins** une solution. Autrement dit, chaque élément $y \in F$ admet **au moins** un antécédent.

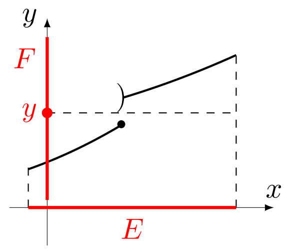
Voici deux représentations d'applications surjectives :





Voici deux représentations d'applications non surjectives :





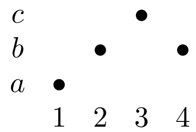
***Remarque 2.4.4* (Attention !)** — L'ensemble d'arrivée considéré est très important. Par exemple, l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ n'est pas surjective. En effet, la fonction exponentielle est toujours positive et donc si $y < 0$ alors y ne possède pas d'antécédent. Par contre, l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$ est surjective : Si $y \in \mathbb{R}_+^*$ alors on a

$$y = \exp(x) \iff \ln(y) = \ln(\exp(x)) \iff x = \ln(y).$$

Ainsi l'équation $y = \exp(x)$ d'inconnue x possède une unique solution : $x = \ln(y)$.

Exemples :

1. Soit l'application $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\}$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ et $f(4) = b$.



   L'application f est surjective. Est-elle injective ?

2. Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \notin \{\emptyset, E\}$, alors l'application indicatrice de A
$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$
   est surjective. Pour trouver un antécédent de 1, il suffit de considérer $x \in A$ (possible car $A \neq \emptyset$). Pour un antécédent de 0 il suffit de considérer $x \in E \setminus A$ (possible car $A \neq E$).

3. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ défini par $f(x) = x^2$, alors f n'est pas surjective. En effet il existe des éléments $y \in \mathbb{N}$ qui n'ont aucun antécédent, par exemple, $y = 2$. Supposons que 2 possède un antécédent x par f. Alors on a
$$f(x) = 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}.$$
   Mais alors x n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$. Donc $y = 2$ n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective.

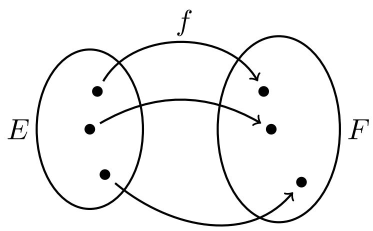
4. L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ est surjective. En effet si $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $y = x^2$ d'inconnue x admet au moins une solution : $x = \sqrt{y}$.
   En revanche, $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas surjective puisque pour $y < 0$, l'équation $y = x^2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. Que dire de l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$?

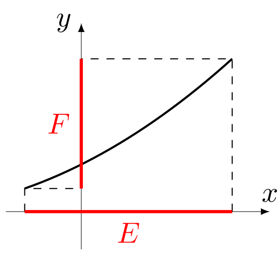
Exercice
Soit $f : E \to F$ une application quelconque. On définit l'application $g : E \to f(E)$ telle que pour tout $x \in E$: $g(x) = f(x)$. Montrer que l'application g est surjective.

2.4.3. Applications bijectives. —

***Définition 2.4.5* (Application bijective ou bijection).** — Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective : Pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Plus formellement, f est bijective si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $\forall y \in F, \exists! x \in E \, : \, y = f(x)$.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet **exactement** une solution. Autrement dit, chaque élément $y \in F$ admet **exactement** un antécédent.





***Remarque 2.4.6* (Attention !)** — Une bijection est la donnée de trois objets :
- Un ensemble de départ E.
- Un ensemble d'arrivée F.
- Une application bijective $f : E \to F$.

Exemples :

1. Soient $E = \{\text{Angleterre, Belgique, Croatie, France}\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Les relations suivantes définissent une application $f : E \to F$ qui est bijective.
$$f(\text{France}) = 1,\quad f(\text{Croatie}) = 2,\quad f(\text{Belgique}) = 3,\quad f(\text{Angleterre}) = 4.$$
2. L'application identité $Id_E : x \in E \mapsto x \in E$ est bijective.
3. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ est bijective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$ un réel quelconque, alors il existe exactement une solution réelle de l'équation $y = 2x + 1$ d'inconnue x :
$$y = 2x + 1 \iff 2x = y - 1 \iff x = \frac{y-1}{2}.$$
4. Nous avons déjà vu que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est ni injective, ni surjective, donc a fortiori non bijective. Par contre, l'application $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ est bijective : Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe exactement une solution réelle positive de l'équation $y = x^2$, qui est $x = \sqrt{y}$.

Théorème 2.4.7. — *Soit E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.*
1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.*
2. *Si f est bijective alors l'application g définie ci-dessus est unique et elle aussi est bijective.*

L'application g s'appelle la ***bijection réciproque*** *de f, elle est souvent notée f^{-1}.*

★ *Pour aller plus loin :*

Démonstration. — 1. Nous allons procéder par double implication.

[Sens $\Longrightarrow$] : Supposons f bijective. Nous allons construire une application $g : F \to E$. Comme f est bijective, pour chaque $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$, on pose alors $g(y) = x$. Ceci défini une application $g : F \to E$ vérifiant :
$$\forall y \in F,\ f\big(g(y)\big) = f(x) = y$$
$$\forall x \in E,\ g\big(f(x)\big) = g(y) = x.$$
Ceci démontre bien que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

[Sens $\Longleftarrow$] : Supposons que g existe et montrons que f est bijective.
- f est surjective : soit $y \in F$, alors on note $x = g(y) \in E$. On a bien :
$$f(x) = f\big(g(y)\big) = f \circ g(y) = Id_F(y) = y,$$
donc f est bien surjective.
- f est injective : soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On compose à gauche par g : $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. On obtient $Id_E(x) = Id_E(x')$, c'est-à-dire $x = x'$, et f est bien injective.

2. Si f est bijective alors g est aussi bijective car $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$, et on applique ce que l'on vient de démontrer avec g à la place de f.
De plus g est unique : en effet soit $h : F \to E$ une autre application telle que $h \circ f = Id_E$ et $f \circ h = Id_F$. En particulier $f \circ h = Id_F = f \circ g$, donc pour tout $y \in F$: $f\big(h(y)\big) = f\big(g(y)\big)$. Or f est injective, d'où $h(y) = g(y)$, ceci pour tout $y \in F$; d'où $h = g$.

□

Exemples :

1. Considérons l'application exponentielle $\exp : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est l'application logarithme népérien $\ln : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$.

2. L'application $\sin : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ est une bijection. Cela provient du théorème de la bijection étudié en analyse (c.f. cours d'analyse). Sa bijection réciproque est souvent noté arcsin au lieu de $\sin^{-1}$.

Exercices

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives.

1. Démontrer que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
2. Démontrer que l'application $g \circ f$ est bijective, de bijection réciproque :
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Travaux dirigés 2 d'algèbre :

Applications

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-4x-6}.$$
Donner le plus grand ensemble $E \subset \mathbb{R}$ tel que $f_{|E} : E \to \mathbb{R}$ soit une application.
2. On considère l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image de 0 et de $\frac{\pi}{4}$. Déterminer tous les antécédents de -1.
3. Soient g et h les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par
$$g(x) = 3x+1 \text{ et } h(x) = x^2-1.$$
Justifier l'existence puis donner l'expression de $g \circ h$ et $h \circ g$. À-t-on $g \circ h = h \circ g$?
4. Dans les exemples suivants, déterminer deux applications u et v (en précisant bien les ensembles de départ et arrivée) telles que $h = u \circ v$:
$$f_1(x) = \sqrt{3x-1}, \quad f_2(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2}), \quad f_3(x) = \frac{1}{x+7}.$$

Exercice 2

Soit l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ et soit $A = [-1, 4]$.

1. Déterminer l'image directe de A par f.
2. Déterminer l'image réciproque de A par f.
On considère la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Quelle est l'image directe, par cos, de $\mathbb{R}$? De $[0, 2\pi]$? De $[0, \frac{\pi}{2}]$?
4. Quelle est l'image réciproque, par cos, de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[1, 2]$?

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3$.

1. Déterminer $f([-1, 1])$, $f([-1, 2])$.
2. Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$, $f^{-1}([-2, 2])$ et $f^{-1}([-3, 1])$.
3. Comparer $f^{-1}(f([-1, 1]))$ avec $[-1, 1]$, puis $f^{-1}(f([-1, 2]))$ avec $[-1, 2]$
4. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?
5. Déterminer A et B de sorte que $g_1 : A \to B, x \mapsto x^2 - 3$ soit surjective et non injective.
6. Déterminer A et B de sorte que $g_2 : A \to B, x \mapsto x^2 - 3$ soit non surjective et injective.
7. Déterminer A et B de sorte que $g_3 : A \to B, x \mapsto x^2 - 3$ soit bijective.

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Donner l'application réciproque dans les cas où l'application est bijective.

$$\begin{array}{llcll} \text{(a)} & n \in \mathbb{Z} \mapsto 2n \in \mathbb{Z} & ; & \text{(b)} & n \in \mathbb{Z} \mapsto -n \in \mathbb{Z} \\ \text{(c)} & n \in \mathbb{N} \mapsto n+1 \in \mathbb{N} & ; & \text{(d)} & n \in \mathbb{Z} \longrightarrow n+1 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Exercice 5

Trouver une application qui décrit les phrases suivantes, puis examiner si votre application est injective, surjective, bijective.

1. Deux nombres qui ont la même valeur absolue ne sont pas nécessairement égaux.
2. Deux nombres positifs sont égaux si et seulement si ils ont même valeur absolue.

3. Tout complexe est le carré d'au moins un nombre complexe.
4. Le point $M(x, y)$ a pour affixe $x + iy$.
5. Les complexes de module 1 sont représentés par le cercle trigonométrique.
6. On joue aux dés. Le jeu consiste à lancer deux dés classiques. Le gain est le produit des valeurs des faces.

Exercice 6

On considère les applications

$$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}, \quad f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2, 2-x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f_3 : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto xy \in \mathbb{R}.$$

1. f_1 est-elle injective ? Même question pour f_2 et f_3.
2. f_1 est-elle surjective ? Même question pour f_2 et f_3.
3. Déterminer toutes les composées possible de deux applications choisies parmi f_1 f_2 et f_3.

Exercice 7

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.
3. Soit $f : (n, p) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^n(2p + 1) \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 8

On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto ab$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Calculer $f((3, 4))$, $f((1, 8))$, $f((4, 3))$.
4. Quels sont les antécédents de 3 ? Quels sont les antécédents de 60 ?
5. Déterminer $f(\{0, 1, 2\} \times \{1, 3\})$, $f(\{0\} \times \mathbb{N})$.
6. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{6\})$, $f^{-1}(\{0, 1, 2\})$.

Exercice 9

Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties non vides de E. On considère l'application $f_{A,B} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), X \mapsto (X \bigcap A, X \bigcap B)$.

Dans un premier temps, Supposons $E = \{a, b, c, d\}$.

1. On suppose que $A = \{a, b\}$ et $B = \{b, c, d\}$. Expliciter $f_{A,B}$.
2. On choisit $A = \{a\}$ et $B = \{c\}$. Expliciter $f_{A,B}$.
3. Les applications précédentes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
   Revenons maintenant au cadre général, E est un ensemble quelconque.
4. Démontrer que $f_{A,B}$ est injective si et seulement si $E = A \bigcup B$.
5. Démontrer que $f_{A,B}$ est surjective si et seulement si $\emptyset = A \bigcap B$
6. Á quelle condition $f_{A,B}$ est-elle bijective ? Déterminer alors son application réciproque.

Exercice 10

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Montrer que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 11

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer que :

1. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.

Exercice 12

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que :

1. f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.
2. f est surjective si et seulement si pour tout $B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$.

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

3.1. Systèmes équivalents

Définition 3.1.1. — On appelle **système d'équations linéaires**, où système linéaire, un ensemble de plusieurs équations linéaires faisant intervenir les mêmes inconnues :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,m}x_m & = b_p \end{array}\right.$$

Les $a_{i,j}$ sont appelés **coefficients** du système, les x_j sont les inconnues du systèmes et les b_i sont les **second membres**. La i-ème équation sera appelée i-ème ligne du système.
Un élément qui vérifie toutes les équations d'un système est appelé **solution du système**.

Dans toutes la suite, on supposera implicitement que les systèmes sont à coefficients réels ou complexes, et on en cherchera des solutions réelles ou complexes.

Exemples :

1. Les triplets $(-2, 3, 0)$ et $(-1, 1, 1)$ sont deux solutions du système

$$(S_0)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

2. Le système suivant décrit la diagonale du plan :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2x \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble de ses solutions est $\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y\}$.

3. Le système suivant décrit la diagonale du plan *dans l'espace* :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2x \\ x & - & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & -z \end{array}\right.$$

L'ensemble de ses solutions est $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y, z = 0\}$.

Définition 3.1.2. — On appelle **taille** d'un système linéaire (S) la donnée du nombre d'inconnues et du nombre d'équations permettant de définir le système (S). On dira que (S) est un système linéaire à p équations et m inconnues, ou éventuellement que (S) est un système de taille $p \times m$.

Remarque 3.1.3. — Une solution, si elle existe, d'un système à p équations et m inconnues est donc un $m-$*uplet*.

Définition 3.1.4. — Deux systèmes sont dit **équivalents** s'ils ont la même taille et le même ensemble de solutions.

Exemple : Les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas équivalents.

Proposition 3.1.5. — *– Réflexivité : Un système est toujours équivalent à lui-même.*
- *Symétrie : Soient (S) et (S') deux systèmes. Si (S) est équivalent à (S'), alors (S') est équivalent à (S).*
- *Transitivité : Soient (S) et (S') deux systèmes équivalents. Alors tout système équivalent à (S) est équivalent à (S').*

Proposition 3.1.6. — *Soit (S) un système linéaire. Les opérations suivantes, appelées* ***opérations élémentaires sur les lignes de*** *(S) définissent un système équivalent à (S) :*
- *interversion de deux lignes ;*
- *multiplication d'une ligne par une constante non-nulle ;*
- *addition d'une ligne à une autre.*

Remarque 3.1.7. — Par la proposition 3.1.5, le système obtenu après plusieurs opérations élémentaires successives est équivalent au système initial.

Exemple : Les systèmes suivants sont équivalents :

$$(S_6)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \end{array}\right. \qquad (S_7)\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & - & 2y & - & 4z & = & -6 \end{array}\right.$$

$$(S_8)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 4-3z \\ & & y & = & 3-2z \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

En effet, on passe du système (S_6) au système (S_7) en effectuant successivement les opérations :

$$\begin{array}{llll} (1) & L_2 & \leftarrow & L_2-2L_1 \\ (2) & L_3 & \leftarrow & L_3-3L_1 \\ (3) & L_2 & \leftarrow & -L_2 \\ (4) & L_2 & \leftrightarrow & L_1, \end{array}$$

puis de (S_7) à (S_8) par les opérations :

$$\begin{array}{llll} (5) & L_3 & \leftarrow & L_3+2L_1 \\ (6) & L_1 & \leftrightarrow & L_2. \end{array}$$

Remarque 3.1.8. — **Attention !** L'ordre dans lequel les opérations sur les lignes d'un système sont faites est important : que se passe-t'il si on décide d'effectuer l'opération (5) avant l'opération (2) ?

Plus généralement, il ne faut pas confondre "nouvelle ligne" et "ancienne ligne" du système. Il est de ce fait hautement déconseillé de faire plusieurs opérations à la fois (vous risqueriez de perdre des solutions du système en chemin...).

3.2. Résolution de systèmes

On appelle **résolution du système linéaire** (S) le fait de déterminer l'ensemble de <u>toutes</u> les solutions du système (S) si elles existent.

Exemples :

1. Le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 2 \\ & & 6y & = & 0 \\ & & y & = & 1 \end{array}\right.$$
n'admet aucune solution. L'ensemble de ses solutions est donc l'ensemble $\mathcal{S} = \emptyset$.

2. Le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$
admet une infinité de solutions. L'ensemble de ses solutions est $\mathcal{S} = \{(-2\lambda, \lambda-1, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Arrêtons-nous un instant sur ces exemples. On voit immédiatement que le premier système n'admet pas de solution, les deux dernières équations étant incompatibles. Il est en revanche très difficile de déterminer l'ensemble des solutions du second système en un coup d'oeil. Comment faire ?

3.2.1. Résolution d'un système linéaire échelonné. —

Définition 3.2.1. — Soit (S) un système linéaire de taille $p \times m$:
$$(S)\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,m}x_m & = b_p \end{array}\right.$$
Le système (S) est **échelonné** lorsque le rang du premier coefficient non-nul est strictement croissant dans la liste d'équations. Autrement dit, le système (S) est échelonné s'il existe un entier $r \in \{1, \ldots, \min(p, m)\}$ et une suite strictement croissante d'entiers $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant m$ tels que le système soit sous la forme :
$$(S)\left\{\begin{array}{rl} a_{1,j_1}x_{j_1} + \ldots\ldots\ldots + a_{1,m}x_m & = b_1 \\ a_{2,j_2}x_{j_2} + \ldots\ldots + a_{2,m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{r,j_r}x_r + \ldots + a_{r,m}x_m & = b_r \\ 0x_r + \ldots + \quad 0x_m & = b_{r+1} \\ \vdots & \\ 0x_r + \ldots + \quad 0x_m & = b_p \end{array}\right.$$
Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, le coefficient non-nul a_{i,j_i} est appelé ***i*-ème pivot**.

★ Plus formellement : (S) est échelonné s'il existe un entier $r \in \{1, \ldots, \min(p, m)\}$ et une suite strictement croissante d'entiers $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant m$ tels que :
- $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$, $a_{i,j_i} \neq 0$;
- $\forall 1 \leqslant i \leqslant r, \forall 1 < j < j_i, a_{i,j} = 0$;
- si $r < p$, $\forall r < i \leqslant p, \forall 1 \leqslant j \leqslant m, a_{ij} = 0$

Exemples : Les systèmes suivants sont échelonnés :
$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 7y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & az & = & 0 \\ & & & - & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 7y & - & z & - & 6t & = & 2 \\ & & ay & + & z & + & t & = & 0 \\ & & & - & az & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$
$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 7y & - & z & = & 2 \\ & & ay & + & z & = & 0 \\ & & & - & az & = & -1 \\ & & & & 0z & = & -a^2 + a + 1 \end{array}\right.$$

Soit (S) un système linéaire de taille $p \times m$ échelonné. Trois cas de figure peuvent se produire :

1. Le système est carré $(p = m)$:
   (a) si la dernière ligne du système est incompatible avec la précédente, alors le système n'admet aucune solution ;
   (b) si la dernière ligne du système est triviale, alors le système admet une infinité de solutions. Le nombre de paramètres nécessaires pour décrire l'ensemble des solutions s'obtient en soustrayant à p le nombre de lignes triviales de (S) ;
   (c) sinon, le système admet une unique solution que l'on détermine par "remontée" : la dernière ligne du système donne la valeur de la dernière variable x_m. On substitue ensuite dans l'avant dernière ligne la variable x_m par sa valeur pour obtenir x_{m-1}, puis on substitue dans la $(m-2)$-ème ligne les valeurs de x_m et x_{m-1} pour obtenir x_{m-2}, etc ...
   Chacune de ces substitutions définit un système équivalent au précédent, pourquoi ?

2. Le système est sous-déterminé $(p < m)$:
   (a) si la dernière équation est incompatible avec les précédentes, alors (S) n'admet aucune solution ;
   (b) sinon, (S) admet une infinité de solutions et l'ensemble de ses solutions sera décrit au moyen de $m - p$ paramètres.

3. Le système est sur-déterminé $(p > m)$:
   (a) le plus souvent, au moins une des $p - m$ dernières équations est incompatible avec la m-ème ligne du système et le système n'admet aucune solution ;
   (b) si les $p - m$ dernières lignes du système sont triviales, le système admet une ou une infinité de solutions. On se réfère alors au cas d'un système carré pour conclure.

Exemple : Considérons à nouveau le système (S_3) :

$$(S_3)\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 7y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & az & = & 0 \\ & & & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

On est ici dans le cas 1(c) : le système admet une unique solution, que l'on détermine par remontée.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 7y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & az & = & 0 \\ & & & - & z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 7y & - & z & = & 2 \\ & & y & & & = & -a \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{7}{3}a + 1 \\ y & = & -a \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solution de (S_3) est donc le singleton $\{(\frac{7}{3}a + 1, -a, 1)\}$.
Attention ! Ici "a" est un paramètre fixé, si sa valeur change, le système ne sera plus le même.

3.2.2. Résolution d'un système linéaire quelconque : la méthode du Pivot de Gauss. — Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions : on peut donc, en utilisant uniquement les opérations décrites dans la proposition 3.1.6, modifier la forme d'un système en s'assurant de conserver l'ensemble de ses solutions. Comme on sait maintenant résoudre les systèmes échelonnés, l'approche la plus naturelle pour la résolution d'un système quelconque est de l'échelonner en effectuant une succession d'opérations élémentaires, puis de se référer à la section précédente.

On propose dans ce chapitre d'échelonner les systèmes linéaires via une méthode systématique appelée **algorithme du pivot de Gauss** :

On se donne un système (S) à p équations à m inconnues.

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,m}x_m & =b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,m}x_m & =b_2 \\ \vdots & \\ a_{p,1}x_1+a_{p,2}x_2+\ldots+a_{p,m}x_m & =b_p \end{array}\right.$$

1. *Choix du pivot :* On suppose que l'inconnue x_1 apparaît dans une des équations du système, c'est à dire qu'il existe un indice i tel que $a_{i,1}\neq 0$. Si $a_{1,1}=0$, on échange L_1 et L_i. Le coefficient $a_{1,1}$ (du nouveau système !) est notre *premier pivot*.

2. On ajoute un multiple de L_1 à toutes les lignes suivantes de sorte que les $p-1$ lignes suivantes ne contiennent plus de terme en x_1. Concrètement, pour $i>1$, on effectue l'opération élémentaire $L_i\leftarrow L_i-\dfrac{a_{1,i}}{a_{1,1}}L_1$.

3. La première étape du pivot de Gauss est terminée, **on ne touche plus à la première ligne tant que le système n'est pas sous forme échelonnée !**

4. *Choix du second pivot :* Si aucune inconnue n'apparaît dans les lignes suivantes, alors le système est échelonné. Dans le cas contraire, on cherche le plus petit indice j_2 tel que x_{j_2} apparaît dans une des lignes d'indice supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire qu'il existe un indice $i\geqslant 2$ tel que $a_{i,j_2}\neq 0$. On effectue alors l'opération élémentaire $L_2\leftarrow L_i$ (triviale si $i=2$). Le coefficient a_{2,j_2} (du nouveau système !) est notre *deuxième pivot*.

5. On ajoute un multiple de L_2 à toutes les lignes suivantes de sorte que les $p-2$ lignes suivantes ne contiennent plus de terme en x_{j_2}.

6. On recommence les étapes

Exemple :

Premier pivot :

$$(S_0)\left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z & =4 \\ 2x+3y+4z & =5 \\ 3x+4y+5z & =6 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z & =4 \\ -y-2z & =-3 \\ 3x+4y+5z & =6 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z & =4 \\ -y-2z & =-3 \\ -2y-4z & =-6 \end{array}\right.$$

Deuxième pivot :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z & =4 \\ -y-2z & =-3 \\ -2y-4z & =-6 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z & =4 \\ -y-2z & =-3 \\ 0 & =0 \end{array}\right.$$

Le système (S_0) admet une infinité de solutions. Un paramètre est ici nécessaire pour décrire l'ensemble des solutions du système. On choisit une des inconnues de la dernière équation pour prendre ce rôle : on choisit z (par exemple), et on déterminer les valeurs prises par x et y par remontée (*ces valeurs dépendront de z !*).

Remontée :

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x+2y+3z & =4 \\ y & =3-2z \\ 0 & =0 \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow L_1-2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} x+3z & =-2+4z \\ y & =3-2z \\ 0 & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =z-2 \\ y & =3-2z \\ 0 & =0 \end{array}\right.$$

Finalement, l'ensemble des solutions du système (S_0) est $\mathcal{S}=\{(\lambda-2,3-2\lambda,\lambda),\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Remarque 3.2.2. — Lorsque l'on implémente le pivot de Gauss sur un ordinateur, le pivot choisi sera celui présentant le plus grand coefficient en valeur absolue. Pourquoi ?

Travaux dirigés 3 d'algèbre :

Résolution de systèmes

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 8y & + & 8z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 5z & + & 4t & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & - & 3t & = & 0 \\ 4x & - & 6y & + & z & - & 6t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & & & = & 0 \\ 6x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 9x & + & 3y & + & 7z & = & 14 \end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 11y & - & 5z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_7)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ x & & & + & 3z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 3

Soit a un nombre réel. On considère le système suivant, d'inconnues x, y, et z :

$$(S_a)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ ax & - & a^2y & + & (a-1)z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Mettre le système (S_a) sous forme échelonnée.
2. Montrer que si $a \neq 1$ et si $a \neq -1$ alors le système possède une unique solution. La préciser.
3. Que se passe-t-il si $a = 1$ ou $a = -1$?

Exercice 4

Soient deux nombres complexes a et b. Discuter, selon leurs valeurs, l'existence de solutions pour chacun des systèmes suivants. Lorsqu'une ou plusieurs solutions existent, préciser leur(s) valeur(s) (en fonction de a et b).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & az & = & b \\ x & + & y & + & a^2z & = & b^2 \end{array}\right.$$

Exercice 5

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 3y + 5z, -x + y + 3z).$$

1. Résoudre $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. L'application f est-elle injective ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre $f(x, y, z) = (a, b, c)$ en fonction des valeurs de a, b, c. L'application est-elle surjective ?
3. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R}^3) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$.

CHAPITRE 4

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

4.1. Relations binaire

De manière informelle, une **relation** $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une proposition qui lie certains éléments de E. Plus précisément, pour tout couple $(x, y) \in E \times E$, c'est la donnée de « Vrai » s'ils sont en relation, ou de « Faux » sinon. On note $x\mathcal{R}y$ lorsque x et y sont en relation.

Commençons avec un exemple concret, disons que E est l'ensemble suivant :

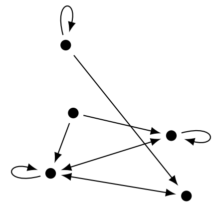
$$E = \{\text{Karima, Emma, Sarah, Laura, Benjamin, Lucien, Thibault, Yacine}\}.$$

On peut définir sur E la relation

« ..... connaît ..... ».

Par exemple, « Lucien connaît Thibault » et « Emma ne connaît pas Laura ». Dans le langage des relations binaires, on dit que l'élément Lucien est en relation avec l'élément Thibault (Lucien $\mathcal{R}$ Thibault) et que Emma n'est pas en relation avec Laura.

Il faut bien faire attention à l'ordre dans lequel on place les éléments. Il peut arriver que x soit en relation avec y mais que y ne soit pas en relation avec x. On peut voir la relation binaire sur E comme étant des fils (orientés) reliant des éléments de E. Nous schématisons une relation ainsi : les éléments de E sont des points, une flèche de x vers y signifie que x est en relation avec y, c'est-à-dire que l'on associe « Vrai » au couple (x, y).



⋆ *Pour aller plus loin :*

Définition 4.1.1. — Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur ensemble E est définie par une partie $\mathcal{G}$ de $E \times E$. Si $(x, y) \in \mathcal{G}$, on dit que x est en relation avec y et on note : $x\mathcal{R}y$.

Exemple :

La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation binaire : Soit $A, B \in E$, alors

$$A\mathcal{R}B \iff A \subset B.$$

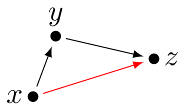
4.2. Relations d'équivalence

Définition 4.2.1. — Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation, c'est une **relation d'équivalence** si :

1. **Réflexivité** : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$

2. **Symétrie** : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$

3. **Transitivité :** $\forall x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$



Exemples :

1. La relation $\mathcal{R}$ « être parallèle » est une relation d'équivalence pour l'ensemble E des droites affines du plan :
   - réflexivité : une droite est parallèle à elle-même,
   - symétrie : si D est parallèle à D' alors D' est parallèle à D,
   - transitivité : si D parallèle à D' et D' parallèle à D'' alors D est parallèle à D''.
2. La relation « être du même âge » est une relation d'équivalence.
3. La relation $\leq$ (sur $E = \mathbb{R}$ par exemple) n'est pas une relation d'équivalence (la symétrie n'est pas vérifiée).
4. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur les systèmes linéaires ayant le même nombre de lignes et les mêmes inconnues, définie par $S\mathcal{R}S'$ si et seulement si S et S' ont le même ensemble de solution.
5. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur les matrices de même taille (m, n) définie par : $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe deux matrices inversibles P et Q (de tailles respectives (n, n) et (m, m)) telles que :

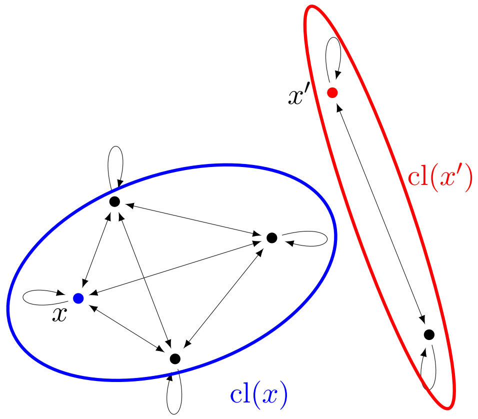
$$B = Q^{-1}AP.$$

   On dit que les matrices A et B sont équivalentes.

4.3. Classes d'équivalence

Définition 4.3.1. — Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$, la **classe d'équivalence** de x est :

$$\mathrm{cl}(x) = \big\{ y \in E \mid y\mathcal{R}x \big\}.$$



La classe $\mathrm{cl}(x)$ est donc un sous-ensemble de E, on le note aussi $\overline{x}$. Si $y \in \mathrm{cl}(x)$, on dit que y un **représentant** de $\mathrm{cl}(x)$.

Proposition 4.3.2. — *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On a les propriétés suivantes :*

1. *$cl(x) = cl(y) \iff x\mathcal{R}y$.*
2. *Pour tout $x, y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$.*

★ *Pour aller plus loin :*

Démonstration. — 1. On suppose que $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$. On a $y \in \mathrm{cl}(y)$ par réflexivité de $\mathcal{R}$. Donc $y \in \mathrm{cl}(x)$, ce qui signifie $x\mathcal{R}y$.
Réciproquement, on suppose que $x\mathcal{R}y$. Soit $z \in \mathrm{cl}(x)$, alors par définition on a $z\mathcal{R}x$. Puisque $x\mathcal{R}y$, et par transitivité de $\mathcal{R}$, on obtient $z\mathcal{R}y$. Par conséquent $z \in \mathrm{cl}(y)$. Ceci démontre $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$, et par symétrie des rôles on peut affirmer que $\mathrm{cl}(y) \subset \mathrm{cl}(x)$. D'où $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$
2. Soient $x, y \in E$. Deux cas apparaissent naturellement.
Cas 1 : Si $x\mathcal{R}y$, alors on vient de démontrer que $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.
Cas 2 : Si x et y ne sont pas en relation, on va démontrer par un raisonnement par l'absurde que $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \varnothing$. Supposons qu'il existe $z \in \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y)$. Alors on a $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Donc par réflexivité et transitivité, on a $x\mathcal{R}y$, ce qui est absurde puisque on suppose que x et y ne sont pas en relation. Ainsi $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \varnothing$.

□

Exemples :

1. Pour la relation « être du même âge », la classe d'équivalence d'une personne est l'ensemble des personnes ayant le même âge. Il y a donc une classe d'équivalence formée des personnes de 19 ans, une autre formée des personnes de 20 ans,... Les deux assertions de la proposition se lisent ainsi :
   – On est dans la même classe d'équivalence si et seulement si on est du même âge.
   – Deux personnes appartiennent soit à la même classe, soit à des classes disjointes.
2. Pour la relation « être parallèle », la classe d'équivalence d'une droite est l'ensemble des droites parallèles à cette droite. À chaque classe d'équivalence correspond une et une seule direction.
3. Voici un exemple que vous connaissez depuis longtemps.
On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la manière suivante (voir TD) :
$$(n_1, n_2)\mathcal{R}(n_1', n_2') \iff n_1 + n_2' = n_1' + n_2.$$
Intuitivement on est en train d'écrire que deux couples sont équivalents si, quand on soustrait le second entier du couple au premier, on obtient le même entier relatif. Mais on n'utilise que la somme pour définir $\mathcal{R}$.
Pour construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$, une possibilité est de définir $\mathbb{Z}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

4. Voici un second exemple que vous connaissez depuis longtemps.
Définissons sur $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par
$$(p,q)\mathcal{R}(p',q') \iff pq' = p'q.$$
Tout d'abord $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :
   - $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout (p,q) on a bien $pq = pq$ et donc $(p,q)\mathcal{R}(p,q)$.
   - $\mathcal{R}$ est symétrique : pour tout (p,q), (p',q') tels que $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$, on a $pq' = p'q$ et donc $p'q = pq'$. D'où $(p',q')\mathcal{R}(p,q)$.
   - $\mathcal{R}$ est transitive : pour tout (p,q), (p',q'), (p'',q'') tels que $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ et $(p',q')\mathcal{R}(p'',q'')$, on a $pq' = p'q$ et $p'q'' = p''q'$. Alors
   $$(pq')q'' = (p'q)q'' = q(p'q'') = q(p''q').$$
   En divisant par $q' \neq 0$ on obtient $pq'' = qp''$ et donc $(p,q)\mathcal{R}(p'',q'')$.

   Nous allons noter $\frac{p}{q} = \mathrm{cl}(p,q)$ la classe d'équivalence d'un élément $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
   Par exemple, comme $(2,3)\mathcal{R}(4,6)$ (car $2 \times 6 = 3 \times 4$), les classes de $(2,3)$ et $(4,6)$ sont égales : avec notre notation cela s'écrit : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.
   C'est ainsi que l'on définit les rationnels : l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est l'ensemble de classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$.
   Les nombres $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ sont bien égaux (ce sont les mêmes classes) mais les écritures sont différentes (les représentants sont distincts).

4.4. L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Commençons par introduire le vocabulaire nécessaire à l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$. Soit a et b deux entiers de $\mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b, ou que b est un **multiple** de a, si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$b = a \times k.$$
On remarquera que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, a divise 0 (ou encore 0 est un multiple de a) : $0 = a \times 0$.

***Définition 4.4.1* (Congruence modulo n).** — Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On définit la relation d'équivalence sur l'ensemble $E = \mathbb{Z}$, appelée « congruence modulo n », comme suit :
$$a \equiv b \pmod{n} \quad \iff \quad a - b \text{ est un multiple de } n$$
On lit a est congru à b modulo n. Si a n'est pas congru à b modulo n, on note $a \not\equiv b \pmod{n}$.

- **Exemple :** Pour $n = 7$.
  - $10 \equiv 3 \pmod{7}$. En effet $10 - 3 = 7$ est un multiple de 7 ($7 = 7 \times 1$).
  - $19 \equiv 5 \pmod{7}$, puisque $19 - 5 = 14 = 2 \times 7$.
  - $77 \equiv 0 \pmod{7}$.
  - $-1 \equiv 20 \pmod{7}$.
  - $40 \not\equiv 2 \pmod{7}$.
- **Remarque :** Dans beaucoup de situations de la vie courante, nous raisonnons avec les modulos. Par exemple pour l'heure : les minutes et les secondes sont modulo 60 (après 59 minutes on repart à zéro), les heures modulo 24 (ou modulo 12 sur le cadran à aiguilles). Les jours de la semaine sont modulo 7, les mois modulo 12,...
- **La relation $\cdot \equiv \cdot \pmod{n}$ est bien une relation d'équivalence :**
  1. Réflexivité : Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 0 \times n$, donc $a - a$ est un multiple de n.
     D'où $a \equiv a \pmod{n}$.
  2. Symétrie : Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b \pmod{n}$, on a $a - b$ est un multiple de n. Autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = kn$ et donc $b - a = (-k)n$. Ainsi $b \equiv a \pmod{n}$.

3. Transitivité : Si $a \equiv b \pmod n$ et $b \equiv c \pmod n$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a - b = kn$ et $b - c = k'n$. Alors $a - c = (a-b) + (b-c) = (k+k')n$ et donc $a \equiv c \pmod n$.

- **La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ est notée $\overline{a}$.** Par définition nous avons donc

$$\boxed{\overline{a} = \mathrm{cl}(a) = \big\{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod n\big\}.}$$

Comme un tel b s'écrit $b = a + kn$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors c'est aussi exactement

$$\boxed{\overline{a} = \big\{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\big\}.}$$

***Définition 4.4.2* (L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).** — Soit $n \geq 2$ un entier. On définit alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence pour la congruence modulo n. Autrement dit :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemples : Pour $n = 7$.
- $\overline{0} = \{\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \ldots\}$
- $\overline{1} = \{\ldots, -13, -6, 1, 8, 15, \ldots\}$
- $\overline{2} = \{\ldots, -12, -5, 2, 9, 16, \ldots\}$
- $\vdots \qquad\qquad \vdots$
- $\overline{6} = \{\ldots, -8, -1, 6, 13, 20, \ldots\}$
- $\overline{7} = \{\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \ldots\} = \overline{0}$
- $\overline{8} = \{\ldots, -13, -6, 1, 8, 15, \ldots\} = \overline{1}$
- $\overline{9} = \{\ldots, -12, -5, 2, 9, 16, \ldots\} = \overline{2}$
- $\vdots \qquad\qquad \vdots$

On voit apparaître une certaine cyclicité à travers l'exemple précédent. Nous allons détailler ce phénomène à travers les résultats suivants, avec pour but de donner une description complète de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous devons d'abord introduire « la somme de deux classes d'équivalence », qui est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ défini comme suit :

Définition 4.4.3. — Soit $n \geq 2$ un entier fixé, soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On définit :

$$\overline{a} + \overline{b} = \{x + y \mid x \in \overline{a},\ y \in \overline{b}\},$$
$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \{xy \mid x \in \overline{a},\ y \in \overline{b}\},$$

où les classes d'équivalence sont considérées pour la congruence modulo n.

La proposition suivante nous permet d'identifier plus simplement l'ensemble $\overline{a} + \overline{b}$.

Proposition 4.4.4. — *Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Alors les classes d'équivalences pour la congruence modulo n vérifient les propriétés suivantes :*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}.$$
$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}.$$

★ *Pour aller plus loin :*

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
\overline{a} + \overline{b} &= \{x + y \mid x \in \overline{a},\ y \in \overline{b}\} \\
&= \{a + kn \ + \ b + k'n \mid k \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a + b \ + \ kn + k'n \mid k \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a + b \ + \ (k + k')n \mid k \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a + b \ + \ (k'')n \mid k'' \in \mathbb{Z}\} \\
&= \overline{a + b}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{a}\cdot\overline{b} &= \{xy \mid x\in\overline{a},\ y\in\overline{b}\}\\
&= \{(a+kn)(b+k'n) \mid k\in\mathbb{Z},\ k'\in\mathbb{Z}\}\\
&= \{ab\ +\ bkn+ak'n+kk'n \mid k\in\mathbb{Z},\ k'\in\mathbb{Z}\}\\
&= \{ab\ +\ (bk+ak'+kk')n \mid k\in\mathbb{Z},\ k'\in\mathbb{Z}\}\\
&= \{ab\ +\ (k'')n \mid k''\in\mathbb{Z}\}\\
&= \overline{ab}.
\end{aligned}
$$

□

Ce dernier résultat nous permet de décrire complètement l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème 4.4.5. — *Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Alors :*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \ldots,\overline{n-2},\overline{n-1}\}.$$

Donc l'ensemble des classes d'équivalence pour la congruence modulo n contient exactement n éléments.

★ *Pour aller plus loin :*

Démonstration. — Premièrement nous remarquons facilement que

$$\overline{n} = \{n+kn \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{(k+1)n \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{k'n \mid k'\in\mathbb{Z}\} = \overline{0}.$$

Ensuite le reste de la démonstration est basée sur le théorème de la division euclidienne : Pour tout entier (relatif) a et n, avec n non nul, la division euclidienne associe un quotient q et un reste r, tous deux entiers, vérifiant :

- $a = nq + r$,
- $0 \leq r < |b|$.

Pour démontrer l'égalité d'ensembles du théorème nous procédons par double inclusion.
Une inclusion est évidente :

$$\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \ldots,\overline{n}-2,\overline{n}-1\} \subset \{\overline{a} \mid a\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Procédons à l'inclusion inverse. Soit $a\in\mathbb{Z}$ quelconque. Nous souhaitons montrer que

$$\overline{a} \in \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \ldots,\overline{n-2},\overline{n-1}\}.$$

Par le principe de la division euclidienne, il existe deux entiers q et r tels que $a = nq + r$ et $0 \leq r < |b|$. Si $q \geq 0$, on a alors par la Proposition 4.4.4 :

$$\overline{a} = \overline{nq+r} = \overline{nq} + \overline{r} = \overline{\underbrace{n+n+\ldots+n}_{q \text{ termes}}} + \overline{r} = \underbrace{\overline{n}+\ldots+\overline{n}}_{q \text{ termes}} + \overline{r} = \underbrace{\overline{0}+\ldots+\overline{0}}_{q \text{ termes}} + \overline{r} = \overline{r}.$$

Pour $q < 0$, le même raisonnement fonctionne avec

$$\overline{nq} = \overline{\underbrace{(-n)+\ldots+(-n)}_{-q \text{ termes}}} = \overline{0}.$$

Dans tous les cas $\overline{a} = \overline{r}$. Or $0 \leq r < |b|$, donc $\overline{a} = \overline{r} \in \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \ldots,\overline{n-2},\overline{n-1}\}$. □

Travaux dirigés 4 d'algèbre :

Relations d'équivalence

Exercice 1

1. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de la manière suivante :
$$(n_1,n_2)\mathcal{R}(n_1',n_2') \iff n_1+n_2'=n_1'+n_2.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ montrer que la relation définie par
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff x+y'=x'+y$$
est une relation d'équivalence. Montrer que deux points (x,y) et (x',y') sont dans une même classe si et seulement s'ils appartiennent à une même droite dont vous déterminerez la direction.

Exercice 2

Soit f une application de E dans F, et $\mathcal{R}_f$ la relation définie sur E par $x\mathcal{R}y$ si $f(x)=f(y)$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Pour un élément x de E donné, décrire sa classe d'équivalence.

Exercice 3

Soit $\mathcal{R}$ la relation fonctionnelle sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $xy-x^2+2x-1=0$. Déterminer une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y=f(x)$.
S'agit-il d'une application ?

Exercice 4

Montrer que la relation définie sur $\mathbb{N}$ par $x\mathcal{R}y \iff \frac{2x+y}{3}\in\mathbb{N}$ est une relation d'équivalence. Montrer qu'il y a 3 classes d'équivalence.

Exercice 5

Définissons sur $E=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par : $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \iff pq'=p'q$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $z\mathcal{R}z' \iff |z|=|z'|$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 7

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y \iff xe^y=ye^x$ est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 8

On considère la relation $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $x\mathcal{R}y$ si x et y ont le même reste dans la division par deux.

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence.

Exercice 9

Déterminer les congruences :

1. Modulo 5 des entiers relatifs suivant : 12, 45, -67, -523, 2018.

2. Modulo 7 des entiers relatifs suivant : 14, 85, -46, 35.
3. Modulo 9 des entiers relatifs suivant : 89, -128, 2018.

Exercice 10

On rappelle que l'addition sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est définie par $\overline{p} + \overline{q} = \overline{p+q}$.

1. Déterminer la table d'addition dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, c'est-à-dire toutes les sommes $\overline{p} + \overline{q}$ pour $\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, sous forme d'un tableau.
2. Déterminer la table d'addition dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
3. Maintenant on définit la multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par : $\overline{p} \times \overline{q} = \overline{p \times q}$. Déterminer la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
4. Déterminer la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 11

Un nombre entier est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Exercice 12

Un nombre entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée des chiffres qui le composent est divisible par 11.

Exercice 13

L'équation $x^2 + 1 = 7y$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. On pourra considérer cette équation dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 14

L' équation $x^5 + 11y^5 = 2z^5$ n'a pas de solution non triviale dans $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire distincte de $(0, 0, 0)$). On pourra considérer cette équation dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Exercice 15

Montrer que pour tout entier relatif n, $5n^3 + n$ est divisible par 6.

Exercice 16

On souhaite démontrer que $x^2 + y^2 = 19z^2$ n'a pas de solution entière non triviale (c'est-à-dire distincte de $(0, 0, 0)$). Supposons que (x_0, y_0, z_0) soit solution de l'équation.

1. On considère l'équation de $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{x_0} = 0$ et $\overline{y_0} = 0$.
2. Montrer que 19^2 divise $x_0^2 + y_0^2$.
3. En déduire que 19 divise z_0.
4. Principe de la descente Fermat : Supposons un instant que l'équation admette une solution (x_1, y_1, z_1) non triviale dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $|z_1|$ est minimal, et non nul. Montrer alors que $(\frac{x_1}{19}, \frac{y_1}{19}, \frac{z_1}{19})$ est encore une solution entière de la même équation, et vérifiant $|\frac{z_1}{19}| < |z_1|$. En déduire le résultat.

CHAPITRE 5

CALCUL MATRICIEL

5.1. Généralités

5.1.1. Définitions. —

Soient p et m deux entiers naturels non-nuls. Une **matrice à p lignes et m colonnes** est un tableau de nombres à p lignes et m colonnes. Les nombres contenus dans une matrice sont appelés **coefficients de la matrice**.

Exemples :

1. Le triplet $(1, 2, 3)$ est une matrice à 1 ligne et 3 colonnes à coefficients dans $\mathbb{N}$.

2. $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1/2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$
   est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes à coefficients réels.

Soit A une matrice à p lignes et m colonnes. Les coefficients de A sont repérés par leur place dans la matrice : on note $a_{i,j}$ le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ème colonne de A. La matrice A peut alors être notée $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p,1} & \dots & \dots & a_{p,m} \end{pmatrix}$$

On appelle **taille de la matrice** A la donnée du nombres de lignes et de colonnes de A. Ici, A est une matrice à p lignes et m colonnes : c'est une matrice de taille $p \times m$.

5.1.2. Matrices remarquables. —

Matrices lignes, matrices colonnes. — Une matrice dont le nombre de lignes des égal à 1 est appelée **matrice ligne**, ou vecteur. Une matrice dont le nombre de colonnes des égal à 1 est appelée **matrice colonne**, ou vecteur colonne.

Matrices carrées. — Une matrice dont les nombres de lignes et de colonnes sont égaux est appelée **matrice carrée**. Si M est une matrice carrée de taille $n \times n$, on dira simplement que c'est une matrice carrée d'ordre n.

Exemples :

1. (2) est une matrice carrée d'ordre 1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La matrice définie par $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}, m_{i,j} = 2i - j$ est une matrice carrée d'ordre n

Matrices triangulaires, matrices diagonales. — Soit $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n.

- Si tous les coefficients de B situés sous la diagonale sont nuls, la matrice est dite **triangulaire supérieure**. En d'autres termes, B est triangulaire supérieure lorsque : $\forall j \in \{1,\ldots,n\}, \forall i \in \{j+1,\ldots,n\}, b_{i,j} = 0$.

  Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Si tous les coefficients de B situés au-dessus de la diagonale sont nuls, la matrice est dite **triangulaire inférieure**. En d'autres termes, B est triangulaire inférieure lorsque : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, j \geqslant i \implies b_{i,j} = 0$.

  Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

- Si tous les coefficients non diagonaux de B sont nuls, alors B est dite **diagonale**. En d'autres termes, B est diagonale lorsque : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j \implies b_{i,j} = 0$.

  Exemple : $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2018}$ avec pour tous $i, j \in \{1,\ldots,2018\}$,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 2^n & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Matrices nulles. — Une matrice de taille $p \times m$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle** de taille $p \times m$. On la note $O_{p,m}$. Attention, il existe autant de matrices nulles distinctes que de tailles de matrices !

Matrices identité. — Une matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée **matrice identité** d'ordre n. On la note I_n.

5.1.3. Opérations sur les matrices. —

Egalité. — Deux matrices sont **égales** si elles ont la même taille et que leurs coefficients sont deux à deux égaux.

Addition. — On peut additionner naturellement deux matrices de même taille en les sommant terme à terme.

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ deux matrices de taille $p \times m$. La somme de A et B est la matrice de taille $p \times m$ définie par :

$$A + B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant m}}, \text{ avec } c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

pour tous $i \in \{1,\ldots,p\}, j \in \{1,\ldots,m\}$.

Exemples :

1. Il est impossible d'additionner les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

Proposition 5.1.1. — *Soient A, B, C trois matrices de même taille $p \times m$.*

1. *L'addition est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.*
2. *L'addition est commutative : $A + B = B + A$.*
3. *La matrice nulle de taille $p \times m$ est un élément neutre pour l'addition : $A + O_{p,m} = A$.*

Démonstration. — Immédiat. □

Multiplication par un scalaire. — Toute matrice peut être multipliée par une constante : il suffit de multiplier chacun des coefficients par la constante.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice de taille $p\times m$ et λ une constante. La matrice λA est la matrice de taille $p\times m$ définie par :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}.$$

Exemple : $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -3\\ -3/2 & 1\end{pmatrix}$

Proposition 5.1.2. — *Soient A, B deux matrices de taille $p\times m$ et α une constante.*
La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition : $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

Démonstration. — C'est immédiat. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ et $\alpha\in\mathbb{C}$. Pour tout $1\leqslant i\leqslant p$ et $1\leqslant j\leqslant m$, on a $\alpha(a_{i,j}+b_{i,j}) = \alpha a_{i,j} + \alpha b_{i,j}$.

□

Multiplication. — Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Le produit AB est la matrice de taille $p\times n$ définie par :

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}},\ \text{avec } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j}$$

pour tous $i\in\{1,\dots,p\}, j\in\{1,\dots,n\}$.

Attention ! Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B.

Exemple : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 7 & 10 & -4\\ -5 & -5 & -2 & 4\end{pmatrix}$

Proposition 5.1.3. — *Soient A une matrice de taille $p\times m$, B une matrice de taille $m\times n$ et C une matrice de taille $n\times r$.*

1. *La multiplication de matrices est associative : $(AB)C = A(BC)$.*
2. *La matrice identité est un élément neutre pour la multiplication de matrices :*

$$AI_m = I_pA = A.$$

Démonstration. — 1. On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$.

La matrice $D = AB$ est une matrice de taille $p\times n$ dont le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne est :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j},$$

donc $(AB)C = DC$ est une matrice de taille $p\times r$ dont le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne est :

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}c_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}b_{l,k}c_{k,j}.$$

D'autre part, $BC = F$ est une matrice de taille $m\times r$ de coefficient d'indice (i,j) :

$$f_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}c_{k,j},$$

donc le produit $A(BC) = AF$ est une matrice de taille $p \times r$ de coefficient :

$$g_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} f_{l,j} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \sum_{k=1}^{n} b_{l,k} c_{k,j} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j}.$$

Les matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ ont la même taille et leurs coefficients sont égaux deux à deux : elles sont égales.

2. Soient $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant m$. Les coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne du produit AI_m est :

$$\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \delta_{k,j},$$

où $\delta_{k,j}$ vaut 1 si $k = j$ et 0 sinon (par définition de la matrice identité). On a donc en fait

$$\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \delta_{k,j} = a_{i,j} \delta j, j = a_{i,j}.$$

□

Remarque 5.1.4. — La multiplication de matrices n'est pas commutative ! Pour que les produits AB et BA existent tous les deux, il faut que les matrices A et B soient des matrices carrées de même ordre, et même dans ce cas on a en général $AB \neq BA$.

Proposition 5.1.5. — *Soient A une matrice de taille $p \times m$ et B, C deux matrices de taille $m \times n$. La multiplication de matrices est distributive sur l'addition : $A(B + C) = AB + AC$.*

Démonstration. — Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $p \times m$ et $B = (b_{i,j})$, $C = (c_{i,j})$ deux matrices de taille $m \times n$. On pose $B + C = D = (d_{i,j})$ et $AB = E = (e_{i,j})$ et $AC = F = (f_{i,j})$. Notons que la matrice D est de taille $m \times n$ et les matrices $E = AB$ et $F = AC$ sont de taille $p \times n$; les matrices $G = A(B + C)$ et $H = AB + AC$ sont donc de taille $p \times n$.

Soient $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. On a alors :

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} d_{k,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} (b_{k,j} + c_{k,j}) = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} c_{k,j}) = e_{i,j} + f_{i,j} = h_{i,j}.$$

Les matrices G et H sont de même taille et leurs coefficients sont deux à deux égaux, elles sont égales.

□

5.2. Inversion de matrices

Définition 5.2.1. — Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B carrée d'odre n vérifiant

$$AB = BA = I_n.$$

On dit alors que B est l'**inverse de** A et on note $B = A^{-1}$.

Remarque 5.2.2. — Si A est une matrice inversible, alors son inverse A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemple : Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre. En effet, on a bien $AB = BA = I_3$.

Proposition 5.2.3. — *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est également inversible et on a :*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. — Supposons que les matrices A et B sont inversibles. On a d'une part :
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
et d'autre part :
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$
□

Pour savoir si une matrice A carrée d'ordre n est inversible et déterminer son inverse le cas échéant, on pourrait être tenté de se donner une matrice $A' = (\alpha_{i,j})$ carrée d'ordre n, puis de résoudre le système défini par l'égalité $AA' = I_n$. Mais une matrice carrée d'ordre n comporte n^2 coefficients, le système obtenu est donc un système de n^2 équations à n^2 inconnues ! Cette méthode n'est finalement pas très efficace...

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n. La matrice A est inversible si et seulement si le système
$$(S)\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots a_{1,n}x_n & = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots a_{2,n}x_n & = y_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = y_n \end{array}\right.$$
admet une unique solution. Dans ce cas, l'inverse de A est la matrice $B = (b_{i,j})$ donnée par
$$(S')\left\{\begin{array}{ll} x_1 = & b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \ldots b_{1,n}y_n \\ x_2 = & b_{2,1}y_1 + b_{2,2}y_2 + \ldots b_{2,n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \ldots + b_{n,n}y_n \end{array}\right.$$

Démonstration. — En effet, si on se donne deux vecteurs colonne :
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$
le système (S) est équivalent à l'égalité $AX = Y$ et le système (S') est équivalent à $X = BY$.

Si A est inversible, alors il existe B telle que $AB = BA = I_n$. Mais alors :
$$AX = Y \implies BAX = BY \implies I_nX = BY \implies X = BY,$$
et le système (S) admet une unique solution donnée par (S').

Réciproquement, si le système (S) admet une unique solution donnée par (S'), alors il existe une matrice B telle que
$$AX = Y \iff X = BY.$$
Mais alors, on a d'une part $Y = AX = A(BY) = (AB)Y$, d'où $AB = I_n$, et d'autre part $X = BY = B(AX) = (BA)X$ et $BA = I_n$. Finalement, on a $AB = BA = I_n$ et la matrice A est inversible d'inverse B. □

Inverser une matrice revient donc à résoudre un système. On utilisera évidemment l'algorithme du pivot de Gauss ! Il est possible d'effectuer le pivot de Gauss "directement sur la matrice", sans repasser par l'écriture de systèmes. Pour cette méthode, appelée méthode Gauss-Jordan, on effectue simultanément des opérations sur les lignes de la matrice à inverser et sur la matrice identité. L'algorithme est par ailleurs exactement le même que celui du pivot de Gauss, seule la forme des objets change. Dans l'exemple ci-dessous, la matrice A est inversée via les deux méthodes.

Exemple : Déterminer l'inverse, s'il existe, de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
& AX = B \\
\iff & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_1 - 2x_2 &= y_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= y_3 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ - x_2 + x_3 &= y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= y_3 \end{cases} \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ - x_2 + x_3 &= y_1 + y_2 \\ x_3 &= -y_1 + y_3 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff}} & \begin{cases} -x_1 + x_2 &= 2y_1 - y_3 \\ - x_2 &= 2y_1 + y_2 - y_3 \\ x_3 &= -y_1 + y_3 \end{cases} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \begin{cases} -x_1 &= 4y_1 + y_2 - 2y_3 \\ -x_2 &= 2y_1 + y_2 - y_3 \\ x_3 &= -y_1 + y_3 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\overset{L_1 \leftarrow -L_1}{\iff}} & \begin{cases} x_1 &= -4y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 &= -2y_1 - y_2 + y_3 \\ x_3 &= -y_1 + y_3 \end{cases} \\
\iff & X = BY
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (A|I_3) \\
\sim & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim}} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\overset{L_1 \leftarrow -L_1}{\sim}} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\sim & (I_3|B)
\end{aligned}
$$

$$\text{avec } B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, la matrice A est inversible, d'inverse B.

Travaux dirigés 5 d'algèbre : Calcul matriciel

Exercice 1

Écrire les matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $a_{i,j} = i + j$ et $b_{i,j} = (-1)^{i+j}$
2. $a_{i,j} = ij$ et $b_{i,j} = \dfrac{1}{i+j}$

Exercice 2

Calculer la matrice $A + 3B - 2C$ pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & -9 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -4 \\ -6 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. Trouver toutes les matrices carrées d'ordre 2 vérifiant :
$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A.$$
2. Trouver toutes les matrices carrées d'ordre 2 vérifiant :
$$A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$
3. Déterminer l'ensemble des matrices A carrées d'ordre 2 telles que pour toute matrice B carrée d'ordre 2 on ait $AB = BA$.

Exercice 4

Calculer A^2, A^3 et A^n pour tout entier naturel n dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. En considérant par exemple les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
montrer que l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ n'est en général pas vraie pour les matrices.

2. Montrer qu'on a $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ si et seulement si les matrices A et B vérifient $AB = BA$.

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on a la relation : $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$.
2. On suppose $ad - bc \neq 0$. Déduire de la question 1. que A est inversible et donner son inverse.
3. Que se passe-t-il si $ad - bc = 0$?

Exercice 7

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles. Calculer leur inverse le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis déterminer des réels λ et μ tels qu'on ait : $A^2 - \lambda A - \mu = 0$.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 9

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Inverser la matrice P.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer D^n.
4. En déduire la forme explicite de A^n.

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. A quelle(s) condition(s) sur a la matrice est-elle inversible ? Donner son inverse dans ce cas.
2. Écrire le système suivant sous forme matricielle :

$$(S_a) \left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

3. Déduire des question précédentes à quelle(s) condition(s) le système (S_a) admet une unique solution et la déterminer.

Exercice 11

Deux matrices A et B sont dites **équivalentes** s'il existe deux matrices P et Q inversibles telles que $B = Q^{-1}AP$.

1. On appelle matrices élémentaires les matrices de la forme $E_{i,j} = (e_{k,l})$ avec

$$e_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq i \text{ ou } l \neq j \\ 1, & \text{si } k = i \text{ et } l = j \end{cases}$$

.

   (a) Soit M carrée d'ordre n. Quelle forme a la matrice $E_{i,j}M$?
   (b) En déduire la forme de la matrice $T_{i,j}(\lambda)M$, où $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & & & 2z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & b \\ & & 2y & + & 3z & = & c \end{array} \right.$$

   (a) Mettre (S) sous forme échelonnée **en notant bien les opérations élémentaires effectuées**.
   (b) Ecrire (S) sous forme matricielle. On note A la matrice associée à (S).

(c) Déduire de ce qui précède que la matrice A est équivalente à une matrice triangulaire que l'on précisera.

3. (a) Montrer que l'équivalence de matrices est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que la classe de toute matrice inversible peut être représentée par une matrice triangulaire supérieure.