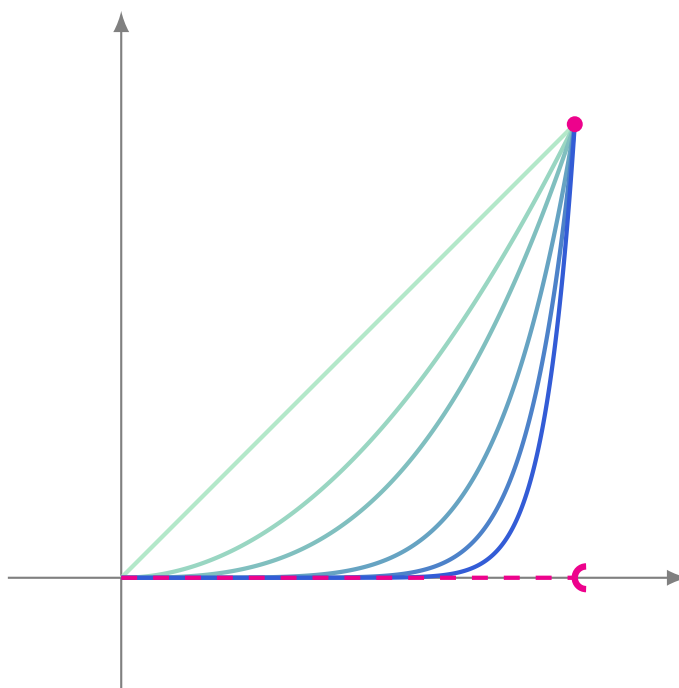


Licence 2

Maths - MIASHS - MPC - Prépa

Suites et Séries de Fonctions



Tentative de programme prévisionnel.

Cours 1 : Suites de fonctions 1.

- Convergence simple ; exemples.
- Convergence uniforme ; exemples.

Cours 2 : Suites de fonctions 2.

- Méthodes autour de la convergence uniforme ; exemples.
- Critère de Cauchy uniforme.

Cours 3 : Suites de fonctions 3.

- Propriétés de la limite : caractère borné, limites, continuité, primitives et dérivées.

Cours 4 : Suites de fonctions 4.

- Théorèmes de Dini
- Théorème de Weierstrass

Cours 5 : Rappels sur les séries numériques. (*Mode révision*)

- Convergence, divergence grossière, convergence absolue.
- Séries à termes $+$: comparaison, critères de Riemann et Bertrand
- Séries alternées, critère d'Abel.
- Limite supérieure et inférieure, critère de d'Alembert, Cauchy, Raabe-Duhamel.

Cours 6 : Séries de fonctions 1.

- Bilan sur les séries numériques : Méthodes et exemples.
- Convergence simple et absolue ; exemples.
- Convergence uniforme, critère de non CVU et Cauchy uniforme ; exemples.
- Convergence normale : Juste la définition.

Cours 7 : Séries de fonctions 2.

- Comparaison des différents modes de convergence.
- Méthodes et exemples.

Cours 8 : Séries de fonctions 3.

- Propriétés de la somme : limites, continuité, primitives et dérivées.
- Fonction zeta de Riemann

Cours 9 : Séries entières 1.

- Définition, rayon de convergence ; exemples.
- Convergence normale à l'intérieur du Disque (à distance > 0 du bord).
- Critère de d'Alembert et Cauchy pour les séries entières ; exemples.

Cours 10 : Séries entières 2.

- Comparaisons de séries et rayons ; exemples.
- Opération sur les séries entières : Combinaisons linéaires, produit, dérivée et primitive formelle.

- Propriétés de la somme et conséquences.

Cours 11 : Séries entières 3.

- Théorème radial d'Abel
- Fonctions DSE, caractère \mathcal{C}^∞ , série de Taylor et caractérisation via le reste intégral.

Cours 12 : Séries entières 4.

- Développements usuels et calculs de somme.
- Application en equa diff?

Table des matières

1	Suites de fonctions	7
1	Convergence simple et convergence uniforme	7
1.1	Convergence simple	7
1.2	Convergence uniforme	11
1.3	Méthodes pour montrer la convergence uniforme	14
1.4	Méthodes pour nier la convergence uniforme	15
1.5	Critère de Cauchy uniforme.	17
2	Propriétés de la limites	18
2.1	Caractère borné	18
2.2	Interversion de limites	19
2.3	Convergence uniforme et continuité	20
2.4	Convergence uniforme et intégration	22
2.5	Convergence uniforme et dérivation	23
3	Les théorèmes de Dini	26
4	Un théorème de Weierstrass	28
2	Rappels et compléments sur les séries numériques	33
1	Généralités	33
2	Séries à termes positifs	35
3	Séries à termes quelconques	36
3.1	Séries géométriques	36
3.2	Séries alternées	36
3.3	Critère d'Abel	36
4	Limite supérieure et limite inférieure	37
4.1	Définitions	37
4.2	Applications aux critères de d'Alembert et de Cauchy	40
5	Bilan : Méthodes pour étudier la nature d'une série	43
3	Séries de fonctions	45
1	Séries de fonctions : différents modes de convergence	45
1.1	Convergence simple, convergence absolue	45
1.2	Convergence uniforme	47
1.3	Convergence normale	49
1.4	Méthodes et exemples	50
2	Propriétés de la somme	55
2.1	Convergence uniforme et caractère borné	55
2.2	Interversion somme et limite	55

2.3	Convergence uniforme et continuité	57
2.4	Convergence uniforme et intégration sur un segment	57
2.5	Convergence uniforme et dérivation	58
3	Un exemple fondamental : la fonction zêta de Riemann	58
4	Séries entières	61
1	Séries entières et rayon de convergence	61
1.1	Définition d'une série entière	61
1.2	Rayon de convergence et somme d'une série entière	62
2	Détermination du rayon de convergence	64
2.1	Règle de d'Alembert	64
2.2	Règle de Cauchy	65
2.3	Comparaisons de rayons	66
3	Opérations sur les séries entières	67
3.1	Structure vectorielle	67
3.2	Produit	67
3.3	Séries dérivées et primitives formelles	68
4	Propriétés de la somme d'une série entière	69
5	Fonctions développables en séries entières	72
5.1	Généralités	72
5.2	Série de Taylor	73
5.3	Applications	76
A	Inégalités classiques	83
1	Sur les fonctions usuelles	83
2	Identité remarquable et valeur absolue (module)	83
3	Conséquences des accroissements finis	84
4	Formule de Taylor	84

Chapitre 1

Suites de fonctions

Notation : Dans tout ce cours, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), et X est une partie non vide de \mathbb{R} . On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de X dans \mathbb{K} .

On appelle *suite de fonctions* de X dans \mathbb{K} toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. On s'intéresse dans un premier temps à la convergence de cette suite vers une nouvelle fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et aux propriétés dont f hérite.

Ainsi, dans la suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne toujours une suite de fonctions de X dans \mathbb{K} , et f est une fonction de X dans \mathbb{K} . Pour bien commencer, il est indispensable de bien comprendre la différence entre les objets/notations suivantes :

$$f_n(x) \in X \quad f_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \quad (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$$

(on rappelle que si E est un ensemble, alors $E^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites indexées par \mathbb{N} et à valeurs dans E). Pour simplifier l'écriture, on se permet parfois de faire les "abus de notations" suivants : $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

1 Convergence simple et convergence uniforme

1.1 Convergence simple

Définition 1.1

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X dans \mathbb{K} *converge simplement* vers f sur X si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{K} vers $f(x)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

On dit que f est la *limite simple* de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$ sur X .

Remarques :

1. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X s'il existe $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$.
2. Il est clair que f est unique puisque pour tout $x \in X$, on a unicité de la limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (lorsqu'elle existe).

3. Il est important de préciser sur quel domaine il y a convergence simple. Il peut arriver que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur X tout entier, mais seulement sur un sous-ensemble $Y \subset X$, et on dit alors que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur Y .

! L'une des difficultés des suites/séries de fonctions est qu'il y a une "double dépendance" de l'objet d'étude : Une par rapport à $n \in \mathbb{N}$, et une par rapport à $x \in X$. Ainsi, l'ordre dans lequel sont placés les quantificateurs dans les définitions est essentiel. Il faut veiller à bien comprendre comment exploiter ces définitions dans les cas concrets. Par exemple,

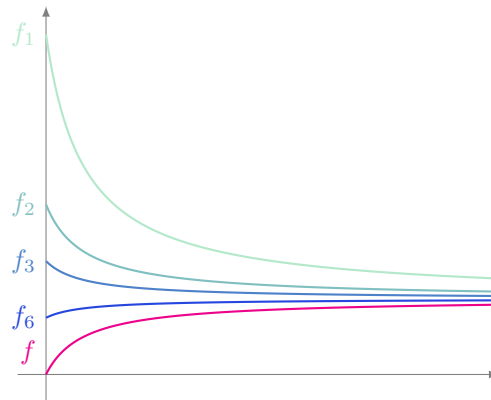
La **convergence simple** correspond à : **On fixe $x \in X$, puis on étudie la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, x étant considéré comme une constante !**

Exemples 1.1 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = \frac{2nx + 3}{3nx + n}$. Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Pour $x > 0$ fixé, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2nx + 3}{3nx + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2x + 3/n)}{n(3x + 1)} = \frac{2x}{3x + 1}.$$

On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$ où $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par l'expression $f(x) = \frac{2x}{3x + 1}$.



2. Étudions la convergence simple sur \mathbb{R}_+ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Puisque le terme x^n possède un comportement asymptotique (i.e. lorsque $n \rightarrow +\infty$) qui dépend des différentes valeurs possibles de x , nous devons distinguer trois cas :

- Si $x \in [0, 1[$, alors $x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- Si $x = 1$, alors $x^n = 1$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$.
- Si $x \in]1, +\infty[$, alors $x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

On obtient donc que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

En utilisant les résultats relatifs aux suites numériques, il est facile d'établir certaines propriétés sur la limite simple. Par exemple :

Proposition 1.2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur X .

1. Si toutes les fonctions f_n sont positives, alors f est positive.
2. Si toutes les fonctions f_n sont croissantes, alors f est croissante.
3. Si toutes les fonctions f_n sont convexes, alors f est convexe.

Questions :

Que dire de la conservation par convergence simple des propriétés suivantes : décroissance, stricte croissance, stricte décroissance, 2π -périodicité, périodicité, ... ?

! Les exemples ci-dessous mettent en lumière le fait que certaines propriétés importantes ne se transmettent pas à la limite simple.

Exemples 1.2 :

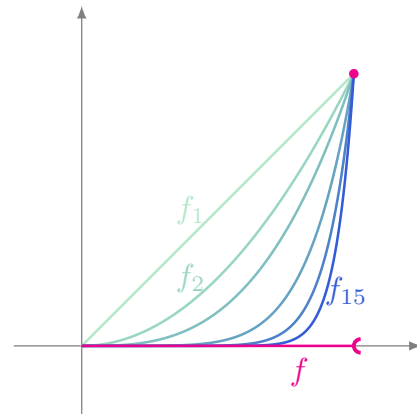
1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on considère $f_n(x) = x^n$.

Pour étudier la convergence simple de cette suite de fonctions, il est préférable de considérer deux cas :

- Si $x = 0$, alors pour $n \geq 1$ on a $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si $x \neq 0$, alors $f_n = x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$ où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



L'exemple ci-dessus montre que **la continuité n'est pas conservée par convergence simple** puisque toutes les fonctions f_n sont continues, mais f n'est pas continue en 1 ! Remarquons également que cette même suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur \mathbb{R}_+ puisque si $x > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

2. Nous allons voir **le caractère "borné" n'est pas non plus conservé par convergence simple**.

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Il faut être prudent avec l'étude de la convergence simple de cette suite puisque la l'expression de f_n dépend de n . Pour $x \in]0, 1]$ fixé, puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$: $\frac{1}{n} \leq x$. Ainsi, pour $n \geq n_0$, on a $f_n(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$. On en déduit donc que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction

$$f : \begin{cases}]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} . \end{cases}$$

Bilan : chacune des fonctions f_n est bornée sur $]0, 1]$, mais f ne l'est pas.

3. Considérons sur $I = [-1, 1]$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

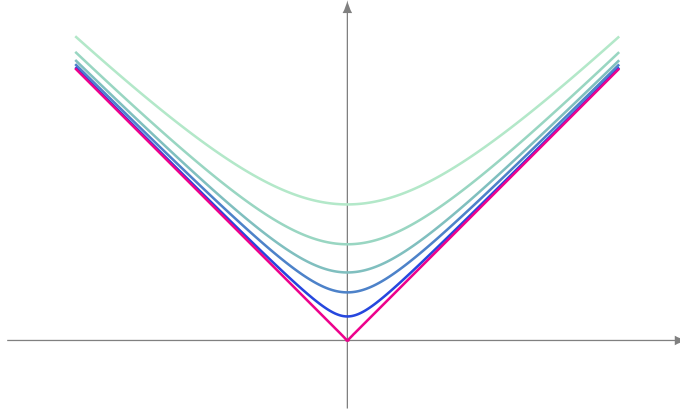
$$f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} .$$

C'est une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction

$$f : x \in [-1, 1] \mapsto \sqrt{x^2} = |x| .$$

Les fonctions f_n sont dérivables sur I . En revanche, la fonction f n'est pas dérivable en 0.

La dérivabilité n'est donc pas toujours conservée par convergence simple.



4. Considérons sur $I = [0, 1]$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

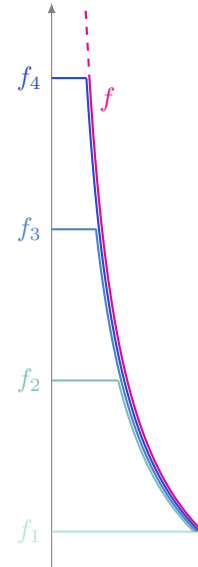
$$f_n : x \mapsto nx(1 - x^2)^n .$$

C'est une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f constante et égale à 0. En revanche,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n \left[\frac{-1}{2(n+1)} (1 - x^2)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx ,$$

et donc **la limite des intégrales n'est pas égale à l'intégrale de la limite.**

Pour espérer transmettre ce type de propriétés, il faut donc considérer une autre notion de convergence...



1.2 Convergence uniforme

Définition 1.3

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ *converge uniformément* vers f sur X si

$$\|f_n - f\|_{\infty, X} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

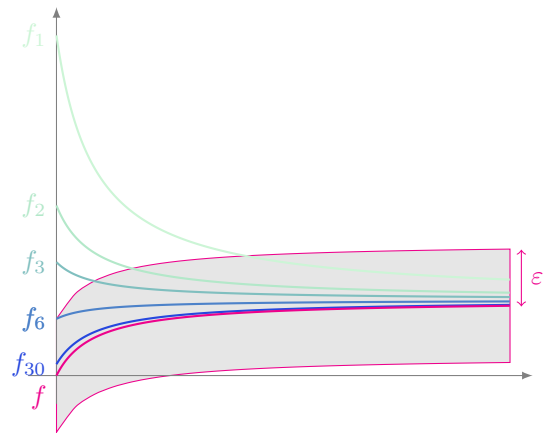
C'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon].$$

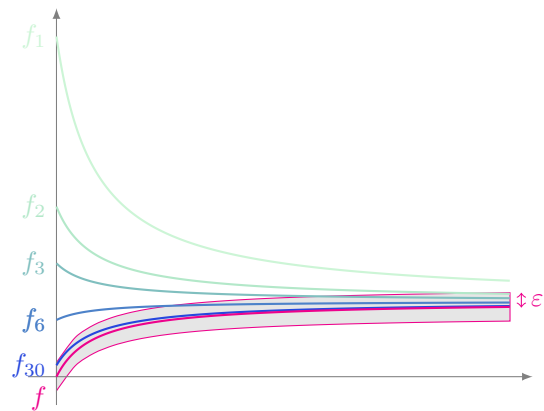
On dit que f est la *limite uniforme* de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur X .

Voici une manière de représenter la définition avec quantificateurs de la convergence uniforme.

Sur ce premier dessin, nous avons fixé $\varepsilon = \frac{1}{2}$, et nous avons dessiné une région en gris autour de l'application f . Cette région correspond à la zone où les fonctions ne s'écartent pas de plus de ε par rapport à la fonction f . Autrement dit, une fonction g vérifie $\|f - g\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \varepsilon$ si et seulement si son graphe est inclus dans la région grisée. Vous pouvez observer que les premières fonctions de la suite ne vérifient pas cette condition, puisque une partie de leur graphe sort de la région grisée. En revanche, à partir d'un certain rang (par exemple $n = 6$ ici) les fonctions doivent toutes vérifier la condition.



Le deuxième dessin ci-contre représente la même chose pour une plus petite valeur de ε . On constate qu'il faut potentiellement aller chercher des indices plus loin pour que la condition soit vérifiée (le graphe de f_6 sort de la zone grisée cette fois-ci). Mais à partir de $n = 30$, les fonctions f_n semblent bien vérifier la condition $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \varepsilon$.



Pour aller plus loin : La notation " $\|\cdot\|_{\infty, X}$ " n'est pas un hasard, l'application $f \mapsto \|f\|_{\infty, X}$ définit une *norme* sur l'espace vectoriel des fonctions bornées de X dans \mathbb{K} , espace qui est souvent noté $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$. Nous obtenons donc un *espace vectoriel normé* $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty, X})$. Vous en apprendrez plus sur les espaces vectoriels normés dans le cours de "Fonctions de plusieurs variables" en L2, puis dans certains cours de L3 ("Topologie" ou "Espaces vectoriels normés" selon votre parcours).

Remarques :

1. Si une fonction f n'est pas bornée sur X , alors nous noterons naturellement $\|f_n\|_{\infty, X} = +\infty$.
2. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur X .
3. Ici encore, il est important de préciser sur quel domaine il y a convergence uniforme. En effet, on aura très souvent à faire à des suites qui convergent simplement sur un domaine X , mais qui ne convergent uniformément que sur un sous-ensemble de X .

! La différence entre convergence simple et convergence uniforme réside dans la position des quantificateurs “ $\forall x \in X$ ” et “ $\exists N \in \mathbb{N}$ ” :

$$\text{CVS : } \forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

$$\text{CVU : } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

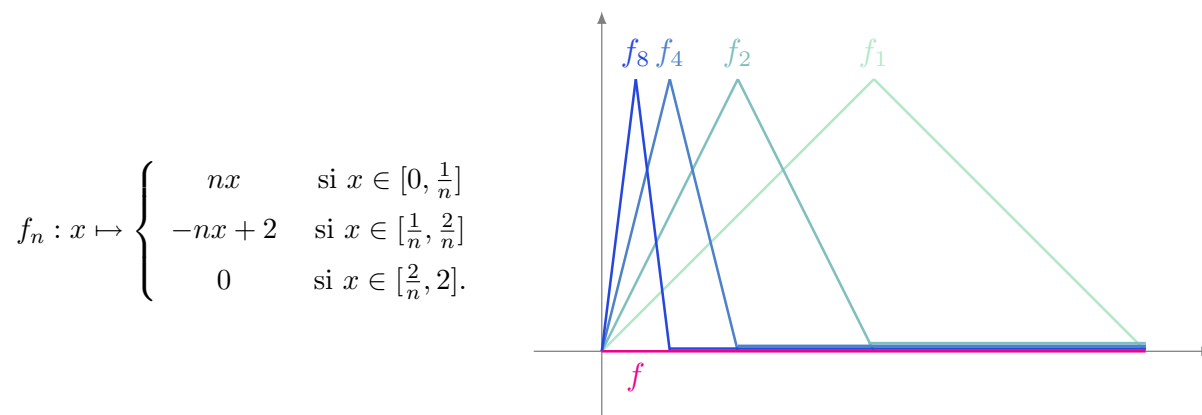
Ainsi, pour la convergence simple, le rang N est susceptible de dépendre de x , alors le rang N de la convergence uniforme doit convenir pour tous les $x \in X$ à la fois (*on dit parfois que N est universel*). La différence est donc de taille, et en particulier, il est relativement évident que la convergence uniforme implique la convergence simple :

Proposition 1.4: CVU \implies CVS

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X .

La réciproque est fautive ! Nous allons tenter de comprendre la différence fondamentale entre ces deux types de convergence à travers des exemples.

Exemple 1.3 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 2]$ par :



- **CVS :** Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $f_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Puis si $x \in]0, 2]$, alors il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ (**qui dépend du x choisi !**) tel que : $\forall n \geq N, \frac{2}{n} \leq x$. On en déduit alors que pour tout $n \geq N, x \in [\frac{2}{n}, 2]$ et donc $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Conclusion : La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 2]$.

Remarque : Dans l'argument utilisé ci-dessus, il est facile de se rendre compte que le rang $N \in \mathbb{N}$ que nous considérons dépend fortement de $x \in]0, 2]$ fixé préalablement (**ce qui est un problème pour la convergence uniforme!**). Par exemple, reprenons l'argument pour différentes valeurs de x :

- Si $x = \frac{1}{2}$, alors on a $\frac{2}{n} \leq x \iff n \geq \frac{2}{x} = 4$. On peut donc prendre $N = 4$.
- Si $x = \frac{1}{8}$, alors on a $\frac{2}{n} \leq x \iff n \geq \frac{2}{x} = 16$. On peut donc prendre $N = 16$.
- Et ainsi de suite... Plus x sera proche de 0, plus la valeur de N grandira, par exemple selon la relation $N = \frac{2}{x}$.

- **CVU :** Nous allons montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f constante égale à 0 sur $[0, 2]$. En effet, il est facile d'estimer la norme infinie :

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0, 2]} = \sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x)| = 1 \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En revanche, si nous changeons l'intervalle d'étude pour éviter le problème en autour de 0, alors cela change la donne. Considérons maintenant cette même suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[a, 2]$ où $a \in]0, 2[$ est un réel fixé. Vous pouvez par exemple imaginer que $a = \frac{1}{2}$ si cela vous aide à comprendre que a est une constante que nous nous sommes fixée arbitrairement. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge toujours vers 0 simplement sur $[a, 2]$, puisque cela était déjà le cas sur l'intervalle plus grand $[0, 2]$. En fait, l'argument que nous avons utilisé permet ici d'obtenir un rang $N \in \mathbb{N}$ qui fonctionne pour tous les $x \in [a, 2]$, ce qui implique la convergence uniforme. Plus concrètement, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \frac{2}{a}$ (par exemple $N = \lfloor \frac{2}{a} \rfloor + 1$). Si $n \geq N$ et $x \in [a, 2]$, alors on a

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} \leq a \leq x \leq 2 \implies x \in \left[\frac{2}{n}, 2 \right] \implies f_n(x) = 0.$$

Donc, pour tout $n \geq N$ et **pour tout** $x \in [a, 2]$, $f_n(x) = 0$. En d'autres termes, pour tout $n \geq N$:

$$\|f_n - f\|_{\infty, [a, 2]} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et donc } f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} 0 \text{ sur } [a, 2].$$

L'exemple ci-dessus peut paraître un peu artificiel, mais il met en évidence un comportement classique d'une suite de fonction qui converge simplement mais non uniformément : Les valeurs des fonctions f_n "explorent" autour d'un point. On retrouve par exemple un comportement similaire dans la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

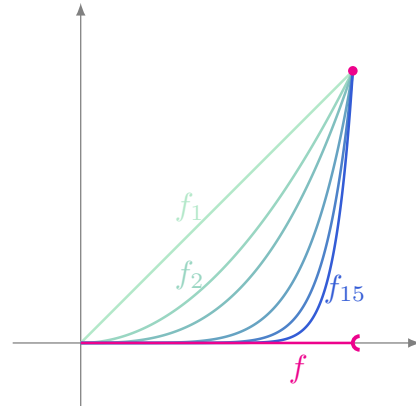
Exemple 1.4 : On pose $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. On a déjà vu que :

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f \text{ où } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty, [0, 1]} &= \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur $[0, 1]$



1.3 Méthodes pour montrer la convergence uniforme

Maintenant que nous avons bien identifié la différence entre convergence simple et convergence uniforme, nous allons voir une première méthode pour montrer qu'une suite de fonction converge uniformément. Bien-sûr, étant donné une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur X , **il faut en premier lieu déterminer sa limite simple**, toujours notée f dans la suite.

- *Méthode 1 : Étude des variations de la fonction $f_n - f$, en déduire la valeur de $\|f_n - f\|_{\infty, X}$ et montrer que $\|f_n - f\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.*

Exemple 1.5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n(1-x). \end{aligned}$$

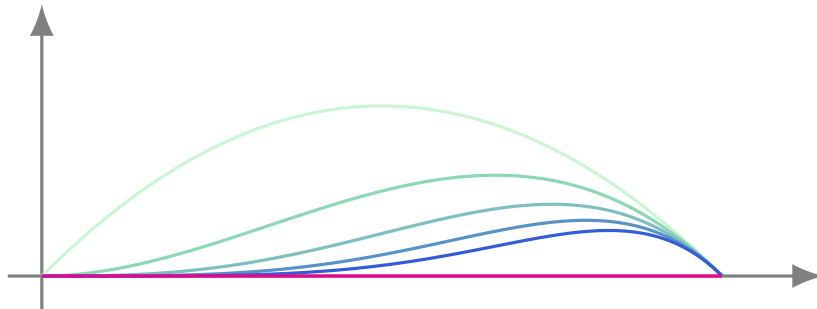
On montre relativement facilement que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. Pour déterminer $\|f_n - f\|_{\infty, [0, 1]} = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$, on étudie les variations de $f_n - f = f_n$. On calcule d'abord la dérivée :

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x),$$

Puis $f'_n(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{n}{n+1}$, donc f_n est croissante de 0 à $\frac{n}{n+1}$ et décroissante ensuite. Par conséquent, elle admet son maximum au point $\frac{n}{n+1}$. Ainsi

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, 1]} = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \times 0 = 0.$$

Donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.



Dans l'exemple précédent, nous sommes parvenu à déterminer précisément la valeur de $\|f_n - f\|_{\infty, [0, 1]}$. Malheureusement, cela n'est pas toujours possible, c'est pourquoi nous devons parfois estimer différemment cette valeur.

- *Méthode 2 : Majorer $|f_n - f|$ par une quantité M_n , qui ne dépend pas de x , et qui converge vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

Proposition 1.5

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si il existe une suite de nombres réelles $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n - f\|_{\infty, X} \leq M_n$.

Exemple 1.6 : On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément via la proposition ci-dessus. Commençons par étudier la convergence simple. Puisque $|\sin(y)| \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (le cas $x = 0$ étant encore plus évident). Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} 0$ sur \mathbb{R} .

Pour démontrer la convergence uniforme de cette suite de fonction, nous utilisons l'inégalité classique : $|\sin(y)| \leq |y|$, valable pour tout $y \in \mathbb{R}$. Nous obtenons alors pour $x \neq 0$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^2x} \right| \leq \frac{|nx|}{n^2|x|} = \frac{1}{n}.$$

Puisque nous avons également clairement que $|f_n(0)| \leq \frac{1}{n}$, nous en déduisons que :

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

d'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} .

Remarque : Pour être capable de bien pratiquer cette dernière méthode, il convient de connaître quelques inégalités classiques, voir la fiche en [Annexe A](#).

1.4 Méthodes pour nier la convergence uniforme

Voyons à présent les deux principales méthodes qui permettent de démontrer que la convergence n'est pas uniforme.

- *Méthode 3 : Trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.*

Proposition 1.6

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f .

Démonstration. Il suffit d'invoquer le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n - f\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

□

Remarque : La contraposée de la proposition ci-dessus peut s'avérer utile dans certains exercices théoriques : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans \mathbb{K} qui converge uniformément sur X

vers une fonction f . Alors, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X , la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour aller plus loin : La réciproque de la proposition précédente est vraie. Ainsi, lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme, on doit pouvoir le détecter à l'aide d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le domaine.

Exemple 1.7 : Nous reprenons le cas de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^3}.$$

Nous avons déjà mentionné un peu plus haut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} 0$. Montrons maintenant rigoureusement que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément. Pour cela, nous considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_0 = 1$ et $x_n = \frac{1}{n}$ sinon. Un calcul direct montre alors que si $n \geq 1$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{1}{1+1} \right| = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

ce qui démontre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur \mathbb{R}_+ .

Dans certains cas, il est difficile de deviner la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X qui permettra de "casser la convergence uniforme". Si vous êtes dans une telle situation, vous pouvez revenir sur une étude de fonction exactement comme nous l'avons présenté dans la méthode 1.

- *Méthode 4 (ou 1 bis) : Étude des variations de la fonction $f_n - f$, en déduire la valeur de $\|f_n - f\|_{\infty, X}$ et montrer que $\|f_n - f\|_{\infty, X} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.*

Exemple 1.8 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto nx(1-x)^n. \end{aligned}$$

- **CVS :** Si $x \in \{0, 1\}$, alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Puis si $x \in]0, 1[$, nous avons $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par un argument de croissances comparées.
- **CVU :** Pour déterminer $\|f_n - f\|_{\infty, [0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$, on étudie les variations de $f_n - f = f_n$. On calcule d'abord la dérivée :

$$f'_n(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}[-(n+1)x + 1].$$

Ainsi $f'_n(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{n+1}$, donc f_n est croissante de 0 à $\frac{1}{n+1}$ et décroissante ensuite. Par conséquent, elle admet son maximum au point $\frac{1}{n+1}$. On en déduit :

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0,1]} = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1} \neq 0.$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

- *Méthode 5 : Utiliser une propriété qualitative (continuité, théorème d'interversion "lim" et "f", etc).*

Par exemple, si toutes les fonctions f_n sont continue en un point, mais que la fonction limite f ne l'est pas, alors la convergence ne peut pas être uniforme. Plus de détails à venir dans la deuxième partie de ce cours.

1.5 Critère de Cauchy uniforme.

En pratique, on n'utilisera que très rarement ce critère (sauf si la limite n'est pas explicite).

Théorème 1.7: Critère de Cauchy uniforme.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans \mathbb{K} . Alors cette suite de fonctions converge uniformément sur X si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies \forall x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \right).$$

Démonstration. Supposons pour commencer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X , disons vers $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N, q \geq N$, on a pour tout $x \in X$

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Supposons maintenant que le critère de Cauchy uniforme est vérifié. Tout d'abord, remarquons que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X . En effet, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{K} , donc elle converge dans \mathbb{K} , vers un élément que l'on note $f(x)$.

Montrons alors que cette convergence est en fait uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \left(\begin{cases} p \geq N \\ q \geq N \end{cases} \implies \forall x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon \right).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N$. On a alors

$$\forall q \in \mathbb{N}, (q \geq N \implies \forall x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon).$$

En passant à la limite lorsque q tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x \in X, |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

□

Pour aller plus loin : Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, alors le théorème précédent peut aussi s'énoncer comme suit : La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X si et seulement si elle est de Cauchy dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty, X})$. On dit que l'espace $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty, X})$ est complet.

2 Propriétés de la limites

2.1 Caractère borné

Proposition 1.8

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X , et si il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_{\infty, X} \leq M,$$

alors $\|f\|_{\infty, X} \leq M$.

Démonstration. Le résultat est une simple conséquence de la conservation des inégalités larges par passage à la limite :

$$\begin{aligned} [\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_{\infty, X} \leq M] &\implies [\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq M] \\ &\implies [\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| \leq M] \\ &\implies [\forall x \in X, |f(x)| \leq M] \\ &\implies [\|f\|_{\infty, X} \leq M]. \end{aligned}$$

□

Remarque : La proposition précédente peut s'appliquer même si la majoration n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$[\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad \|f_n\|_{\infty, X} \leq M] \implies [\|f\|_{\infty, X} \leq M].$$

On termine cette sous partie avec un énoncé similaire mais impliquant cette fois-ci la convergence uniforme.

Proposition 1.9

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X , et si les fonctions f_n sont bornées sur X (pas nécessairement par une même constante), alors f est bornée sur X .

Démonstration. Puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur X , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$: $\|f_n - f\|_{\infty, X} \leq 1$. On en déduit alors par inégalité triangulaire :

$$\|f\|_{\infty, X} \leq \|f - f_{n_0}\|_{\infty, X} + \|f_{n_0}\|_{\infty, X} \leq 1 + \|f_{n_0}\|_{\infty, X}.$$

□

2.2 Intersion de limites

Théorème 1.10: Limites finies.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ appartenant à \bar{I} (i.e. appartenant à I ou à son bord). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$.

Alors :

- la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = \ell$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_n(x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur I , elle vérifie le critère de Cauchy uniforme (Théorème 1.7). Notons N l'entier donné par le critère de Cauchy uniforme et fixons momentanément deux entiers $n \geq N$ et $p \geq N$. Alors

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre x vers x_0 dans cette inégalité, on obtient $|\ell_n - \ell_p| \leq \varepsilon$. On a alors prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, |\ell_n - \ell_p| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, (ℓ_n) est une suite de Cauchy dans \mathbb{K} , elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite, i.e.

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_n(x) \right).$$

Il reste à montrer que $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Pour cela on écrit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - \ell_n + \ell_n - \ell| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Traduisons le fait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et aussi que $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ :

$$\begin{aligned} \exists n_1, \forall x \in I, \quad \forall n \geq n_1, \quad |f(x) - f_n(x)| &< \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{convergence uniforme de } (f_n)), \\ \exists n_2, \forall n \geq n_2, \quad |\ell_n - \ell| &< \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{convergence de } (\ell_n)). \end{aligned}$$

Posons maintenant $N := \max\{n_1, n_2\}$. On a alors

$$\forall x \in I, \quad \forall n \geq N, \quad |f(x) - \ell| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(x) - \ell_N|.$$

Traduisons maintenant le fait que $\ell_N = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_N(x)$ pour ce N fixé (on suppose ici que $x_0 \in \mathbb{R}$, le cas $x_0 \in \{\pm\infty\}$ est parfaitement similaire et est laissé en exercice) :

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \implies \left| f_N(x) - \ell_N \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Par conséquent, nous avons montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \implies \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$$

Ceci prouve que $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. □

Théorème 1.11: Limites infinies.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ appartenant au bord de I (i.e. appartenant à $\bar{I} \setminus I$). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_n(x) = +\infty$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_n(x) = -\infty$).

Alors :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = -\infty$).

Démonstration. Nous ne rédigeons la preuve que pour le cas $x_0 = +\infty$, les cas $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 = -\infty$ sont analogues et laissés en exercice. Nous souhaitons démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Fixons $M > 0$ arbitraire. Par convergence uniforme, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq 1$. Puis, d'après les hypothèses, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{n_0}(x) = +\infty$. Ainsi, par définition, il existe $A > 0$ assez grand tel que :

$$\forall x \in I, \quad x \geq A \implies f_{n_0}(x) \geq M + 1.$$

On en déduit alors que pour tout $x \geq A$:

$$f(x) = f_{n_0}(x) + (f(x) - f_{n_0}(x)) \geq M + 1 - \|f - f_{n_0}\|_{\infty, I} \geq M,$$

ce qui prouve le résultat escompté. □

2.3 Convergence uniforme et continuité

Le Théorème 1.10 nous permet d'affirmer que la continuité est conservée par convergence uniforme (i.e. cette propriété passe à la limite uniforme).

Corollaire 1.12

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans \mathbb{K} et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Si :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en un point $a \in X$,
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur X .

Alors f est continue en a . On peut alors en particulier écrire

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = f(a).$$

Corollaire 1.13

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans \mathbb{K} qui converge uniformément sur X vers une fonction f . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X , alors f est continue sur X .

Exemple 1.9 : Retour sur la “*Méthode 5*” pour nier la convergence uniforme. Dans les exercices, on utilisera souvent la contraposée de ces corollaires. Un exemple classique est de nouveau la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. Il est clair que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1]$;
- La limite simple f , donnée par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$, n’est pas continue en 1.

Par conséquent, la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f ne peut être uniforme sur $[0, 1]$!

Par ailleurs, le corollaire précédent implique la proposition suivante :

Proposition 1.14

Soit $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} . Si, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$, on a :

- f_n continue sur $[\alpha, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur $[\alpha, \beta]$.

Alors f est continue sur $]a, b[$.

Démonstration. Soit $x_0 \in]a, b[$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < x_0 < \beta < b$. On applique alors le Corollaire 1.13 pour en déduire que f est continue en x_0 . Nous venons de démontrer que f est continue en n’importe quel point $x_0 \in]a, b[$, ce qui revient à dire que f est continue sur $]a, b[$. \square

⚠ Attention, la continuité passe à $]a, b[$, mais PAS la convergence uniforme !

Par exemple,

$$[\forall \alpha > a, (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [\alpha, +\infty[]]$$

n’implique PAS que

$$[(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur }]a, +\infty[.]]$$

En revanche,

$$[\forall \alpha > a, f \text{ est continue sur } [\alpha, +\infty[]]$$

entraîne que

$$[f \text{ est continue sur }]a, +\infty[.]$$

Exemple 1.10 : “CVU sur tout segment de $I \not\Rightarrow$ CVU sur I ”.

On pose $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$. On a alors :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$ où $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.
- Si $[0, \beta] \subset \mathbb{R}_+$, alors nous avons pour tout $x \in [0, \beta]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2\beta}{n} + \frac{1}{n^2} \implies \|f_n - f\|_{\infty, [0, \beta]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D’où la convergence uniforme sur $[0, \beta]$, ceci étant valable pour n’importe quel $\beta > 0$.

- En revanche, la convergence n’est pas uniforme sur \mathbb{R}_+ :

$$\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} = +\infty.$$

2.4 Convergence uniforme et intégration

Dans toute cette section, on considère deux réels a et b vérifiant $a < b$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Théorème 1.15: Interverson limite et intégrale.

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a, b]$,
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur $[a, b]$

Alors $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} F$ sur $[a, b]$, où

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Puisque les fonctions f_n sont continues sur $[a, b]$, les fonctions F_n sont bien définies. De même, puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, on a que f est continue sur

$[a, b]$. Ainsi F a bien un sens également. Ensuite, on écrit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |F(x) - F_n(x)| &= \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^x \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} dt \\ &\leq (x - a) \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \\ &\leq (b - a) \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Les inégalités ci-dessus prouvent que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} F$ sur $[a, b]$. En particulier nous avons $F_n(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(b)$, ce qui s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt = F(b).$$

□

Exemple 1.11 : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \sin(nx) e^{-n(x+1)} dx$.

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $I = [0, 1]$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto x^n \sin(nx) e^{-n(x+1)}.$$

Puisque l'on a pour tout $x \in [0, 1]$, $|x^n| \leq 1$, $|\sin(nx)| \leq 1$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$

$$0 \leq |f_n(x)| \leq e^{-nx-n} \leq e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. Comme les fonctions f_n sont continues, on en déduit via le théorème précédent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \sin(nx) e^{-n(x+1)} dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Remarque : Les théorèmes les plus efficaces pour passer la limite sous le signe “ \int ” sont les théorèmes de *convergence monotone* et de *convergence dominée*. Ils relèvent de la théorie de l'intégration de Lebesgue, qui sera vue en Licence 3.

2.5 Convergence uniforme et dérivation

Dans cette section, I désignera un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Théorème 1.16

On suppose ici que I est un intervalle **borné** (i.e. aucune de ses deux bornes n'est infinies).

Si :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$ sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} g$ sur I .

Alors :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur I ;
- f est de classe \mathcal{C}^1 sur I avec $f' = g$, i.e.

$$f' = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n.$$

Démonstration. Fixons x_0 dans l'intervalle I . On pose pour tout $x \in I$:

$$G_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(x_0),$$

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

D'après le Théorème 1.15, la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers G sur tout segment de I . Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = G_n(x) + f_n(x_0),$$

ce qui implique facilement que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $G + f(x_0)$ sur tout segment de I . Par unicité de la limite simple, nous avons nécessairement que $f = G + f(x_0)$. Or la fonction $G + f(x_0)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I comme primitive d'une fonction continue, nous en déduisons que f est également \mathcal{C}^1 sur I avec :

$$f' = (G + f(x_0))' = G' = g.$$

Pour terminer la démonstration, il reste à prouver que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I tout entier. Rappelons que I est ici un intervalle borné, notons $|I|$ sa longueur (par exemple $|I| = b - a$ si $I =]a, b[$). On a alors :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty, I} &= \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0) - \int_{x_0}^x g(t) dt - f(x_0) \right| \\ &\leq \sup_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \sup_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x \|f'_n - g\|_{\infty, I} dt \right| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f'_n - g\|_{\infty, I} \sup_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x 1 dt \right| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f'_n - g\|_{\infty, I} \times |I| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

Remarques : - La preuve montre qu'on peut remplacer l'hypothèse de convergence simple des f_n vers f sur I par la convergence en un seul point :

$$\exists x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

- Si nous retirons l'hypothèse " I est un intervalle borné", alors le théorème précédent reste vrai, excepté la conclusion " $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur I ", qui elle est en général fausse. Pour observer cela, considérons $I = \mathbb{R}_+$ et $f_n(x) = \frac{x}{n}$. On laisse alors au lecteur le soin de montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} 0$, $f'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} 0$, mais pour autant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} 0$.

Ainsi, lorsque I n'est pas un intervalle borné, nous appliquerons préférentiellement le premier corollaire ci-dessous.

Corollaire 1.17

On suppose ici que I est un intervalle quelconque. Si :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$ sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} g$ sur tout segment de I .

Alors :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur tout segment de I ;
- f est de classe \mathcal{C}^1 sur I avec $f' = g$, i.e.

$$f' = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n.$$

Le second corollaire se déduit du corollaire ci-dessus par récurrence.

Corollaire 1.18

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque. Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^k sur I ;
- $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors :

- $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I .
- Si f est la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors f est de classe \mathcal{C}^k sur I avec

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, f^{(i)} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(i)}.$$

Remarque : Si I est borné, et si $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément I tout entier, alors, comme dans le Théorème 1.16, nous obtenons que $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I , $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

3 Les théorèmes de Dini

Dans toute cette section, on considère des suites de fonctions réelles à valeurs réelles.

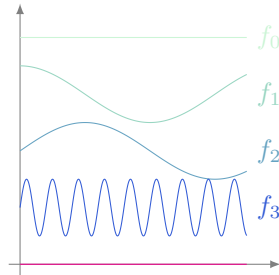
Théorème 1.19: Premier théorème de Dini.

Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} , et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} 0$ sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, i.e. $n \leq m \implies \forall x \in I, f_n(x) \geq f_m(x)$.

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} 0$ sur I .

! Ce ne sont pas les fonctions f_n qui sont supposées décroissantes, mais bien la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est décroissante! En d'autres termes, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.



Démonstration. Premièrement, remarquons que si $x \in I$ alors $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ en décroissant, et donc nécessairement $f_n(x) \geq 0$. Ainsi toutes les fonctions f_n sont positives sur I . De même, il est facile de voir que la suite $(\|f_n\|_{\infty, I})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Nous allons raisonner par l'absurde pour démontrer que $\|f_n\|_{\infty, I} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Supposons donc que $\|f_n\|_{\infty, I} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty, I} > \varepsilon$. Par définition, cela signifie qu'il existe $x_n \in I$ tel que $f_n(x_n) \geq \varepsilon$. Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$, cette suite est bornée. Grâce au théorème de Bolzano–Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Notons $\ell \in I$ sa limite. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n$, on a

$$\phi(m) \geq m \geq n,$$

dont on déduit grâce à la décroissance de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que

$$f_n(x_{\phi(m)}) \geq f_{\phi(m)}(x_{\phi(m)}) \geq \varepsilon.$$

La fonction f_n étant continue en ℓ , on en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f_n(x_{\phi(m)}) = f_n(\ell) \geq \varepsilon.$$

La suite $(f_n(\ell))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas vers 0, ce qui contredit l'hypothèse de convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0. \square

On a bien-sûr un résultat similaire pour une suite croissante de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On obtient également le corollaire suivant.

Corollaire 1.20

Si une suite monotone $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un segment converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence sur ce segment est en fait uniforme.

Démonstration. L'idée principal est d'appliquer le théorème précédent à suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = (|f_n - f|)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous avons alors :

- $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} 0$ sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur I par somme et composition ;
- La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Détaillons quelque peu ce dernier point. Pour se fixer les idées, supposons que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (l'argument est similaire si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante). On a alors pour tout $x \in I$:

$$|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) \geq f(x) - f_{n+1}(x) = |f_{n+1}(x) - f(x)|.$$

Les points ci-dessus justifie que l'on peut appliquer le premier théorème de Dini à la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On déduit donc que :

$$\begin{aligned} (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} 0 \text{ sur } I &\iff \|g_n\|_{\infty, I} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ &\iff \|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ &\iff (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f \text{ sur } I. \end{aligned}$$

□

A présent, si l'on ne suppose plus la monotonie de la suite (f_n) mais la monotonie de chaque fonction f_n , on a alors le résultat suivant :

Théorème 1.21: Second théorème de Dini.

Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} . Si

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f$ sur I ;
- f est continue sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur I (ou : $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante sur I).

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} 0$ sur I .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Nous allons démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \varepsilon$, ce qui démontrera le théorème.

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur I . Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \forall y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On considère alors une subdivision $\{a = a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = b\}$ de I , de pas inférieur à η .

Puisque pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}$, $|a_{i+1} - a_i| \leq \eta$, on a que

$$\forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \quad |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \in [a, b]$. Il existe i tel que $a_i \leq x \leq a_{i+1}$. La croissance des f_n (par hypothèse), de f (limite simple de fonctions croissantes), et le choix de la subdivision impliquent que :

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(a_{i+1}) - f(a_i) \leq f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$f_n(x) - f(x) \geq f_n(a_i) - f(a_{i+1}) \geq f_n(a_i) - f(a_i) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par convergence simple, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall i = 0, \dots, p, \quad |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les inégalités précédentes entraînent que, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| &\leq \max_{i=0, \dots, p-1} \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{i=0, \dots, p-1} \max(|f_n(a_i) - f(a_i)|, |f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1})|) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

4 Un théorème de Weierstrass

Théorème 1.22: d'approximation de Weierstrass.

Si f est une application continue d'un segment $[a, b]$ dans \mathbb{K} , alors il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Dans la suite, nous donneront seulement les principales idées de la preuve. On invite donc le lecteur à combler les trous pour obtenir une démonstration complète de ce résultat.

Nous effectuons la preuve dans un premier temps en supposant $[a, b] = [0, 1]$. Nous expliquerons ensuite comment en déduire le résultat sur un segment quelconque.

Soit une application continue f de $[0, 1]$ dans \mathbb{K} . On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)$ le polynôme à coefficients dans \mathbb{K} défini par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

La suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ constitue la suite des *polynômes de Bernstein* sur $[0, 1]$. Nous allons montrer dans la suite que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} f$ sur $[0, 1]$, ce qui démontrera le théorème de Weierstrass.

Objectif 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer les égalités ci-dessous.

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$
2. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$
3. $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx((n-1)x + 1).$

Objectif 2 :

Démontrer ensuite que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|f_n(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}.$$

On fixe maintenant $\varepsilon > 0$ arbitraire. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, 1]$. Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], \left(|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Notons

$$E_1 = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket : \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \eta \right\}, \quad E_2 = \left\{ \llbracket 0, n \rrbracket : \left| x - \frac{k}{n} \right| > \eta \right\}$$

et écrivons alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k \in E_1} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in E_2} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Objectif 3 :

Démontrer que

$$\sum_{k \in E_1} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Objectif 4 :

Démontrer que

$$\sum_{k \in E_2} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq 2 \|f\|_{\infty, [0,1]} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\eta^2} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Objectif 5 :

Grâce à l'Objectif 1, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Objectif 6 :

Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|f_n(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_{\infty, [0,1]}}{2\eta^2 n},$$

et conclure quant à la démonstration du théorème de Weierstrass sur $[0, 1]$.

Passons au cas général du segment $[a, b]$, $a < b$. Posons pour tout $x \in [0, 1]$

$$g(x) = f(a + (b-a)x);$$

g est alors une application continue sur $[0, 1]$. D'après le cas particulier précédent, on sait que la suite $(B_n(g))_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes converge uniformément vers g sur $[0, 1]$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ l'application polynomiale définie par

$$\forall t \in [a, b], P_n(t) = B_n(g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right).$$

Les applications

$$\begin{cases} [0, 1] \rightarrow [a, b] \\ x \mapsto a + (b-a)x \end{cases}, \quad \begin{cases} [a, b] \rightarrow [0, 1] \\ t \mapsto \frac{t-a}{b-a} \end{cases},$$

sont bijectives et réciproques l'une de l'autre, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{t \in [a, b]} |P_n(t) - f(t)| = \sup_{x \in [0, 1]} |B_n(g)(x) - g(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui termine la démonstration.

Faisons un exemple d'application.

Corollaire 1.23

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{K} . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0,$$

alors $f = 0$.

Démonstration. D'après l'hypothèse et par linéarité de l'intégrale, on a que pour tout polynôme P

$$\int_a^b P(x) f(x) dx = 0.$$

D'après le théorème de Weierstrass, on sait qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers f . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b f^2(x) dx = \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b f(x) P_n(x) dx = \int_a^b f(x) (f(x) - P_n(x)) dx \\ &\leq (b-a) \|f\|_{\infty, [a, b]} \|f - P_n\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0,$$

et puisque f est continue sur $[a, b]$, on obtient que $f^2 = 0$ puis $f = 0$. □

Chapitre 2

Rappels et compléments sur les séries numériques

1 Généralités

Définition 2.1: Série numérique.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle *série numérique* de terme général u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$, la suite des sommes partielles $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$, avec $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

Remarque : Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain indice n_0 , il en va de même pour la série, que l'on note alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$. La suite des sommes partielles $(S_N)_{N \geq n_0}$ est alors définie par $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$.

Définition 2.2: Nature d'une série.

On dit que la série $\sum u_n$ *converge* (respectivement *diverge*) si la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ des sommes partielles converge (respectivement diverge). En cas de convergence, la limite est appelée *somme de la série* et est notée :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N.$$

Dans ce cas, on peut définir le reste R_N d'ordre N par $R_N = S - S_N$, qui s'écrit

$$R_N = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n.$$

Remarques :

1) Il est important de bien comprendre la différence entre les objets/notations suivantes :

$$\sum u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \quad S_N = \sum_{k=0}^N u_k \in \mathbb{K} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}.$$

En particulier, il faut se méfier du symbole de sommation dans l'écriture de la somme d'une série $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. En effet, ce n'est pas une somme au sens usuel, elle n'est par exemple pas commutative en général (l'ordre de sommation a une importance). En revanche, puisqu'il s'agit d'une limite, les propriétés usuelles de la limite telle que la linéarité s'applique au symbole " $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ".


2) Les sommes partielles d'une série sont toujours définies mais les restes ne le sont que lorsque la série est convergente : $(R_N)_{N \geq 0}$ est alors une suite de limite nulle.

Proposition 2.3: Un critère de divergence.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \implies \sum u_n \text{ diverge.}$$

Remarque : 1) La contraposée de cette proposition est à connaître également :

$$\sum u_n \text{ converge} \implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

2)  Il ne s'agit pas d'une équivalence! L'exemple classique est la série de harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente mais pour autant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Définition 2.4: Divergence grossière.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, on dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

Théorème 2.5: Critère de Cauchy pour les séries.

La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ des sommes partielles satisfait le critère de Cauchy, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_0, \forall p \geq 0, |S_{N+p} - S_N| = \left| \sum_{k=N+1}^{N+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Définition 2.6: Série absolument convergente

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que cette série est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente. Une série convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente*.

Théorème 2.7: Absolue convergence \Rightarrow convergence.

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

2 Séries à termes positifs

Dans ce cas, la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ des sommes partielles est croissante. Donc il n'y a que 2 comportements possibles : ou bien elle converge vers $S \in \mathbb{R}^+$ ou bien elle diverge vers $+\infty$.

Proposition 2.8: Critère de convergence.

Une série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ des sommes partielles est majorée.

Corollaire 2.9: Comparaison de séries à termes positifs.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que pour tout n : $0 \leq u_n \leq v_n$.

- a) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- b) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 2.10: Sommation des relations de comparaison.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- a) Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$, alors $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.
- b) Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge.
- c) Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 2.11: Comparaison série-intégrale.

Soit f une fonction continue (par morceaux) sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = f(n)$. L'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ est convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.

Proposition 2.12: Séries de Riemann.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 2.13: Séries de Bertrand.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice : Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^3 - 1}}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln(n) + n}$, $\sum_{n \geq 0} n^3 e^{-n}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{n^2 + n}{n^3 \ln(n)}$.

3 Séries à termes quelconques

Si la série est à termes quelconques, on peut essayer de prouver qu'elle est absolument convergente en utilisant les critères s'appliquant aux séries à termes positifs. Cependant toutes les séries convergentes ne sont pas nécessairement absolument convergentes. Si tel est le cas, on peut essayer d'appliquer d'autres critères.

3.1 Séries géométriques

Proposition 2.14

La série numérique $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente si et seulement si $q \in]-1, 1[$. De plus,

$$\forall q \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

3.2 Séries alternées

Théorème 2.15: Critère des séries alternées.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle décroissante, positive, et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Alors la série alternée $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ converge et l'on a majoration du reste suivante :

$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| = \left| \sum_{k \geq n+1} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}.$$

3.3 Critère d'Abel

Théorème 2.16: Théorème d'Abel.

Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n = a_n b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si :

- (i) $\left(\sum_{k=0}^n b_k \right)_{n \geq 0}$ est une suite bornée, et
 - (ii) la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0.
- Alors $\sum u_n$ est convergente.

Exemple 2.12 : Démontrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \times]0, +\infty[$. En effet, pour $n \geq 1$, posons $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = e^{in\theta}$. Il est évident que $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. De plus :

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| = |e^{i\theta}| \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right| = \frac{|1 - e^{in\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{|1| + |e^{in\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} < +\infty$$

Le théorème d'Abel s'applique, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente.

4 Limite supérieure et limite inférieure

4.1 Définitions

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. On définit la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ en posant

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

La suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée, donc convergente. Sa limite est appelée la *limite supérieure* de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ et on la note :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k.$$

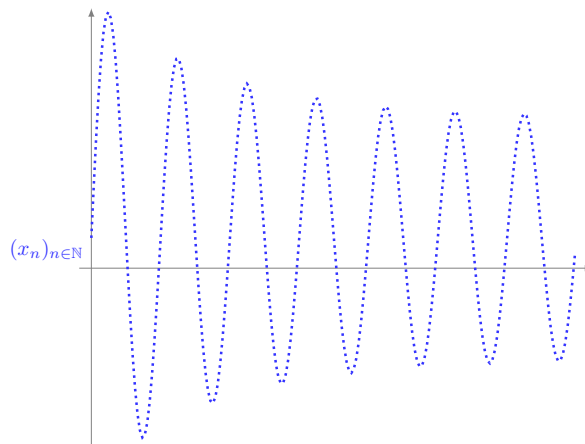
De même, la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$$

est croissante et majorée, donc convergente. Sa limite est appelée la *limite inférieure* de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ et on la note :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} x_k = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k.$$

Exercice : Sur le dessin ci-dessous, représenter les suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sup\{x_k : k \geq n\})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\inf\{x_k : k \geq n\})_{n \in \mathbb{N}}$ (en admettant que l'amplitude des oscillations se stabilise).



Remarque :

- On a toujours : $z_n = \inf_{k \geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k \geq n} x_k = y_n$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors on pose simplement $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
- De même, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors on pose $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$.

Proposition 2.17

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée.

1. La limite supérieure de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
2. La limite inférieure de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.

Commençons par rappeler qu'une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lorsqu'elle existe, est la limite d'une sous-suite convergente de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ici, puisque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous assure l'existence d'une telle sous-suite.

Démonstration. Nous rédigeons la preuve uniquement pour la limite supérieure, les arguments se transposent naturellement à la limite inférieure.

- Montrons que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous allons construire par récurrence une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{\varphi(k)} - \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Cela impliquera bien l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers la limite supérieure de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Initialisation : Par définition de la limite supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |\sup\{x_k : k \geq n\} - \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^0}.$$

Maintenant, par définition de la borne supérieure, il existe $k_0 \geq n_0$ tel que :

$$|x_{k_0} - \sup\{x_k : k \geq n_0\}| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^0}.$$

On pose alors $\varphi(0) := k_0$, et on a alors :

$$|x_{\varphi(0)} - \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n| \leq |x_{\varphi(0)} - \sup\{x_k : k \geq n_0\}| + |\sup\{x_k : k \geq n_0\} - \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n| \leq \frac{1}{2^0}.$$

Hérédité : Supposons que $\varphi(0) < \dots < \varphi(k)$ soient construits. On réitère alors l'argument ci-dessus pour définir $\varphi(k+1) > \varphi(k)$. En effet, il existe $n_{k+1} > \varphi(k)$ tel que :

$$|\sup\{x_k : k \geq n_{k+1}\} - \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Puis, par la caractérisation de la borne supérieure, on en déduit l'existence d'un entier $\varphi(k+1) \geq n_{k+1}$ tel que :

$$|x_{\varphi(k+1)} - \sup\{x_k : k \geq n_{k+1}\}| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On conclut à nouveau via l'inégalité triangulaire :

$$|x_{\varphi(k+1)} - \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n| \leq |x_{\varphi(k+1)} - \sup\{x_k : k \geq n_{k+1}\}| + |\sup\{x_k : k \geq n_{k+1}\} - \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ceci achève la récurrence et termine la première partie de la démonstration.

- Montrons que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En effet, si ℓ est une autre valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $x_{\psi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Mais alors :

$$x_{\psi(n)} \leq \sup\{x_k : k \geq \psi(n)\} := y_{\psi(n)}.$$

Or, par définition de la limite supérieure, $y_{\psi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Ainsi par conservation des inégalités larges par passage à la limite, nous obtenons :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\psi(n)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\psi(n)} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque : Pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque (bornée ou non), on peut voir la \liminf comme la plus petite limite (éventuellement $-\infty$) d'une suite extraite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et la \limsup comme la plus grande (éventuellement $+\infty$). On peut toujours extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux sous-suites qui convergent vers ces deux limites. De plus, elles fournissent une caractérisation de la convergence :

Corollaire 2.18

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Dans ce cas, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette valeur commune, i.e. :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Démonstration. “ \implies ” : Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors toutes ses sous-suites convergent vers ℓ . Autrement dit, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède qu'une seule valeur d'adhérence et donc nous déduisons de la proposition précédente que :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell.$$

“ \impliedby ” : Premièrement, puisque $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on a nécessairement

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Maintenant, en passant à la limite dans les inégalités :

$$z_n = \inf_{k \geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k \geq n} x_k = y_n,$$

le théorème d'encadrement de la limite (dit "des gendarmes") implique que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

□

Exercice : Donner la limite inférieure et la limite supérieure de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. $x_n = (-1)^n$;
2. $x_n = (-1)^n + \frac{1}{2^n}$;
3. $x_n = (-1)^n \times n$;
4. $x_{2n} = -n$ et $x_{2n+1} = 0$;
5. $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$;
6. $x_n = \cos(n)$.

Pour le dernier exercice ci-dessus, vous pouvez admettre sans démonstration que l'ensemble $\{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ est *dense* dans $[-1, 1]$.

4.2 Applications aux critères de d'Alembert et de Cauchy

Proposition 2.19: Règle de Cauchy.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Alors

- a) si $L < 1$, $\sum u_n$ converge.
- b) si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- c) si $L = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice : Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ pour

1. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
2. $u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$.

Proposition 2.20: Règle de d'Alembert.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Posons

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ et } \ell = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Alors

- a) si $L < 1$, $\sum u_n$ converge.
- b) si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- c) Si $\ell \leq 1 \leq L$, on ne peut rien conclure, c'est le cas douteux de la règle de d'Alembert.

Exercice : Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{an}}$ pour $a = 1$ et $a = 2$.

Remarque : La règle de Cauchy n'est bien adaptée qu'à l'étude des séries dont le terme général u_n contient essentiellement des puissances. La règle de d'Alembert est bien adaptée aux cas où u_n

s'exprime à l'aide de produits, en particulier quand u_n contient des puissances ou des factorielles. Le champ d'application de ces règles est donc restreint : il s'agit de séries dont la convergence est rapide (convergence géométrique) ou dont la divergence est grossière (ce que l'on est souvent capable de détecter directement). Ces règles ne s'appliquent ni aux séries de Riemann, ni aux séries de Bertrand. Ainsi, si u_n est une fraction rationnelle en n et $\ln(n)$, alors les deux critères échouent bien souvent. Dans ce cas, il est préférable de déterminer un équivalent et appliquer les critères de comparaisons.

⚠ Dans la majorité des exercices, nous n'auront pas besoin de faire appel aux limites supérieures et inférieures, puisque le terme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou encore $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admettra une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$. On pourra donc appliquer la version des règles de Cauchy et de d'Alembert que vous avez vues en S3.

En principe, la règle de Cauchy est légèrement plus forte que celle de d'Alembert. Par exemple, comme le montre la proposition ci-dessous, si la règle de d'Alembert permet de conclure, c'est que celle de Cauchy le pouvait également.

Proposition 2.21

Soit $\sum u_n$ une série à strictement termes strictement positifs.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{1/n} = \ell.$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon \geq 0$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon.$$

Par récurrence on en déduit que, $\forall n \geq n_0$,

$$u_{n_0}(\ell - \varepsilon)^{n-n_0} \leq u_n \leq u_{n_0}(\ell + \varepsilon)^{n-n_0}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(\ell - \varepsilon)^{n-n_0}} = \ell - \varepsilon \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(\ell + \varepsilon)^{n-n_0}} = \ell + \varepsilon.$$

Donc, $\exists n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1$,

$$\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Exercice : Pour la série de terme général $\sum u_n$ avec $u_{2n} = \frac{2^n}{3^n}$ et $u_{2n+1} = \frac{2^n}{3^{n+1}}$, montrer que le critère de l'Alembert ne permet pas de conclure, alors que le critère de Cauchy montre que la série est convergente.

Pour aller plus loin : En s'inspirant pour partie de la démonstration ci-dessus, on peut démontrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes strictement positifs :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Cela implique en particulier que, en toute généralité, le cas douteux de la règle de d'Alembert (Proposition 2.20) est légèrement plus vaste que celui de la règle de Cauchy (Proposition 2.19).

⚠ Ce comportement est à prendre en compte uniquement si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$! En effet, en cas d'égalité, i.e. si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite réelle, alors on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{1/n}.$$

En particulier, dans ce cas, les deux méthodes possèdent les mêmes cas douteux.

Ainsi, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, alors les règles de d'Alembert et de Cauchy ne permettent pas de conclure. En revanche, on peut tester le critère ci-dessous.

Proposition 2.22: Règle de Raabe–Duhamel.

Soit $\sum u_n$ une série à strictement termes positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

- a) si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge.
- b) si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge.
- c) si $\alpha = 1$, on ne peut rien conclure.

Lemme 2.23

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = O((v_n)_{n \in \mathbb{N}})$

Démonstration. En effet, on a :

$$\left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \right] \implies \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \right].$$

Ainsi la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est donc majorée (par son premier terme), i.e. il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{v_n} \leq M,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Démonstration de la Proposition 2.22. a) Si $\alpha > 1$, il existe $\gamma > 1$ tel que $1 < \gamma < \alpha$. Soit $v_n = n^{-\gamma}$. C'est le terme général d'une série convergente. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma} = 1 - \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\alpha - \gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc, comme $\alpha > \gamma$, on en déduit que pour n assez grand : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Ainsi, via le Lemme 2.23 on obtient que $u_n = O(v_n)$. Donc $\sum u_n$ converge.

b) Si $\alpha < 1$, il existe $\gamma < 1$ tel que $\alpha < \gamma < 1$. Soit $v_n = n^{-\gamma}$. C'est le terme général d'une série divergente. En procédant comme précédemment, on trouve que $v_n = O(u_n)$. Ainsi $\sum u_n$ diverge. \square

Exemple 2.13 : Déterminons la nature de la série $\sum(e^n n! / n^n)$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-n \ln(1+1/n)} = e^{1-n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = 1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Ainsi nous pouvons appliquer la règle de Raabe-Duhamel avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, ce qui signifie que la série est divergente.

5 Bilan : Méthodes pour étudier la nature d'une série

Soit $\sum u_n$ une série numérique

1. Est-ce que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$? Si ce n'est pas le cas, alors $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!}$.

2. Si $u_n \geq 0$, ou alors pour étudier la convergence absolue, on peut

- Déterminer un **équivalent** de u_n (ou de $|u_n|$), puis **comparer** avec une série de Riemann, Bertrand, ou encore une série géométrique.

Exemples : $\sum_{n \geq 1} 1 - \cos(\pi/n)$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n \geq 0} \cos(n)e^{-n}$.

- Appliquer la **règle de d'Alembert**, souvent si u_n s'exprime à l'aide de produits (puissances, factorielles, ...).

Exemples : $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^{an}}$ avec $a = 1, 2$.

- Appliquer la **règle de Cauchy**, souvent si u_n contient essentiellement des puissances.

Exemple : $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

- Si $u_n \geq 0$ et si les techniques ci-dessus ne fonctionnent pas, c'est que l'on est sur un cas difficile. On peut envisager une **comparaison série-intégrale**.

Exemples : C'est comme cela que l'on sait gérer les séries de Riemann et de Bertrand.

3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de signe constant, et si $\sum u_n$ ne converge pas absolument, alors on peut

- Utiliser le **critère des séries alternées** si toutes les conditions sont réunies.

Exemples : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(n)}$.

- Penser au **théorème d'Abel**.

Exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^s}$ avec $(s > 0$ et $\theta \in \mathbb{R})$.

Chapitre 3

Séries de fonctions

Notation : Comme dans le premier chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), X est une partie non vide de \mathbb{R} , et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est une suite de fonctions.

Définition 3.1: Série de fonctions.

On appelle *série de fonctions* de terme général f_n , notée $\sum f_n$ ou encore $\sum_{n \geq 0} f_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n f_k.$$

La fonction $S_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est appelée n -ième somme partielle associée à $\sum f_n$.

Comme une série de fonction est avant tout une suite de fonctions, nous pouvons exploiter ce qui été étudié lors du chapitre pour définir une notion de convergence pour les séries de fonctions. C'est exactement le point de départ de la prochaine partie.

1 Séries de fonctions : différents modes de convergence

1.1 Convergence simple, convergence absolue

Définition 3.2: Convergence simple.

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement* sur X (en abrégé, $\sum f_n$ CVS sur X) si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X , c'est-à-dire, si pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge dans \mathbb{K} .

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X , on appellera *reste d'ordre n* , pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{aligned} R_n : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x). \end{aligned}$$

On appellera *somme de la série* de fonctions $\sum f_n$ l'application

$$\begin{aligned} S : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Remarque : En pratique, il arrive parfois que $\sum f_n$ ne converge pas simplement sur X tout entier. Si tel est le cas, on considère alors l'ensemble \mathcal{D}_S des $x \in X$ tel que $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge, ensemble appelé domaine de convergence simple de la série de fonction $\sum f_n$.

Définition 3.3: Convergence absolue.

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge absolument* sur X (en abrégé, $\sum f_n$ CVA sur X) si pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge dans \mathbb{K} .

La convergence absolue correspond à la convergence simple de la série de fonctions $\sum |f_n|$. De plus, d'après le cours sur les séries numériques, on a la relation suivante entre les deux relations de convergence définies ci-dessus.

Proposition 3.4: CVA \implies CVS

Si $\sum f_n$ converge absolument sur X alors $\sum f_n$ converge simplement sur X .

En pratique, pour étudier la convergence simple (ou absolue), on fixe $x \in X$, puis on étudie la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$ (ou $\sum |f_n(x)|$) en considérant donc x comme une constante. **Attention !** On ne cherche pas toujours à donner une formule explicite pour $S(x)$!

Exemples 3.14 :

1) Soit la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$, où pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Donc, par comparaison avec une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument, et donc simplement sur \mathbb{R} .

2) La série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$, avec $f_n(x) = x^n$, converge simplement et absolument sur $] -1, 1[$ (série géométrique), et nous avons la formule suivante pour la somme :

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

En revanche, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge (grossièrement) en tout autre point $x \in] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

3) La série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$, converge simplement sur \mathbb{R} (critère des séries alternées) mais ne converge absolument en aucun point de \mathbb{R} (le vérifier grâce à un équivalent).

4) La série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$, où $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge simplement sur $] -1, 1[$ mais n'est absolument convergente que sur $] -1, 1[$.

1.2 Convergence uniforme

Définition 3.5

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X (en abrégé, $\sum f_n$ CVU sur X) si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément sur X .

Dans la pratique, si l'on doit étudier la convergence uniforme directement, alors nous utilisons la caractérisation suivante :

Proposition 3.6: Caractérisation.

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur X , et
- $\|R_n\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU} 0$ sur X .

Démonstration. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X , alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X (voir la Proposition 1.4). De plus :

$$\|R_n\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = \|S - S_n\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ par hypothèse.}$$

La réciproque découle naturellement de l'égalité $\|R_n\|_{\infty, X} = \|S - S_n\|_{\infty, X}$, où R_n a bien un sens par convergence simple de $\sum f_n$. \square

En particulier, nous avons l'implication :

$$\sum f_n \text{ CVU sur } X \implies \sum f_n \text{ CVS sur } X$$

Remarque :

1. **La convergence uniforme n'implique pas la convergence absolue.** Par exemple, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Le critère de séries alternés implique que $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS sur $]0, +\infty[$. De plus, on a la majoration du reste :

$$\|R_n\|_{\infty,]0, +\infty[} = \sup_{x \in]0, +\infty[} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \sup_{x \in]0, +\infty[} \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi $\sum f_n$ CVU sur $]0, +\infty[$. En revanche, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|f_n(x)| = \frac{1}{x+n}$, ce qui est le terme général d'une série divergente. Donc $\sum f_n$ ne converge absolument en aucun point de $]0, +\infty[$.

2. **La convergence absolue n'implique pas la convergence uniforme.** On considère la suite de fonctions f_n de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} donnée par l'expression $f_n(x) = x^n$. Nous avons déjà vu que

$\sum f_n$ CVS et CVA sur $[0, 1[$. De plus la somme $S : [0, 1[$ est donnée par

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Pour démontrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$, nous allons voir deux méthodes. La première consiste à utiliser un résultat du premier chapitre : La conservation du caractère borné par convergence uniforme d'une suite de fonction. Or, ici on observe alors que

- $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est bornée sur $[0, 1[$.
- S n'est pas bornée sur $[0, 1[$ puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$.

D'après la Proposition 1.9, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

La second méthode, plus rapide, consiste à remarquer que $\|f_n\|_{\infty, [0, 1[} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et ensuite on applique la proposition suivante :

Proposition 3.7: Un critère de non convergence uniforme.

Si $\|f_n\|_{\infty, X} \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, alors la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur X .

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $n \geq 1$ alors $f_n = S_n - S_{n-1}$, et donc :

$$\|f_n\|_{\infty, X} = \|S_n - S_{n-1}\|_{\infty, X} \leq \|S_n - S\|_{\infty, X} + \|S - S_{n-1}\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

⚠ La réciproque est fausse ! Si on considère $f_n(x) = \frac{1}{n}$ sur \mathbb{R} , alors on a bien $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, mais pour autant $\sum f_n$ ne converge même pas simplement !

Une question paraît assez naturelle : Quelle est la méthode générale, en pratique, pour démontrer la convergence uniforme d'une série de fonction ? En effet, lorsque nous ne pouvons pas utiliser la majoration du reste des séries alternés, démontrer "à la main" que

$$\|R_n\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ne paraît pas chose aisée ! Même si nous ne pouvons pas toujours éviter de travailler directement sur $\|R_n\|_{\infty, X}$, nous allons voir dans les prochaines sections des techniques qui nous permettent d'obtenir la convergence uniforme plus facilement. Nous terminons avec le critère de Cauchy uniforme, ce critère servira dans certains cas difficiles.

Théorème 3.8: Critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions.

Une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \left(q > p \geq N \implies \forall x \in X, \left| \sum_{k=p+1}^q f_k(x) \right| \leq \varepsilon \right).$$

1.3 Convergence normale

Définition 3.9

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur X (en abrégé, $\sum f_n$ CVN sur X) si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, X}$ converge.

Bien évidemment, la définition ci-dessus impose implicitement que toutes les fonctions f_n est bornée sur X . En effet, cela n'a pas de sens d'étudier la convergence de $\sum \|f_n\|_{\infty, X}$ si $\|f_n\|_{\infty, X} = +\infty$. Aussi, la proposition ci-dessous, bien qu'évidente, s'avère très utile en pratique.

Proposition 3.10

La série $\sum f_n$ converge normalement sur X si et seulement si il existe une suite réelle $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- La série numérique $\sum M_n$ converge, et
- $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{\infty, X} \leq M_n$.

Exemple 1.

Considérons la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ donnée par $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$. Alors on a pour tout $x \in [-\pi, \pi]$:

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \implies \|f_n\|_{\infty, [-\pi, \pi]}.$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n\|_{\infty, [-\pi, \pi]}$ converge également, i.e. $\sum f_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$. On en déduit alors que cette série converge uniformément et absolument sur ce même intervalle. En effet, la convergence normale est en fait la notion la plus forte de convergence :

Théorème 3.11: CVN \implies CVA et CVN \implies CVU.

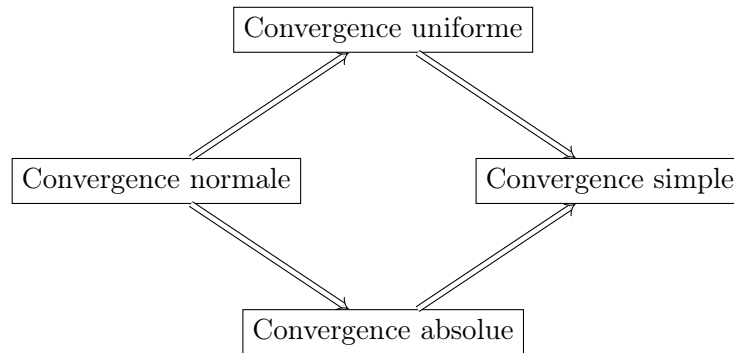
Si $\sum f_n$ converge normalement sur X alors $\sum f_n$ converge absolument et uniformément sur X .

Démonstration. • Démontrons la convergence absolue. Si $x \in X$, alors on a évidemment $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty, X}$, et donc la série $\sum |f_n(x)|$ converge par comparaison de série à termes positifs. D'où la convergence absolue sur X .

- Le point précédent implique que la série $\sum f_n$ converge simplement sur X . Il reste donc étudier la norme infinie reste R_n , ce que nous faisons ci-dessous :

$$\|R_n\|_{\infty, X} = \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sup_{x \in X} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Bilan : Liens entre les différents modes de convergence

Pour terminer avec la convergence normale, voici un critère qui permet de démontrer la non convergence normale sans avoir à estimer précisément $\|f_n\|_{\infty, X}$.

Proposition 3.12: Un critère de non convergence normale.

Si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que la série numérique $\sum |f_n(x_n)|$ diverge, alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur X .

Démonstration. C'est évident : $\|f_n\|_{\infty, X} \geq |f_n(x_n)|$ et $\sum |f_n(x_n)|$ diverge, d'où la divergence de $\sum \|f_n\|_{\infty, X}$ par comparaison. \square

Exemple 2.

Si $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2x}$ sur \mathbb{R}_+^* , alors pour $x_n = \frac{1}{n}$ on a $|f_n(x_n)| = \frac{|\sin(1)|}{n}$, ce qui est le terme général d'une série divergente. Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+^* .

1.4 Méthodes et exemples

Ci-dessous, nous allons donner une "feuille de route" pour étudier les différents modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$. Les techniques présentées ci-dessous permettent de traiter la grande majorité des exercices du TD.

1. On commence par étudier la convergence simple et absolue. En particulier, on détermine le domaine de convergence simple \mathcal{D}_S de la série $\sum f_n$.
2. On étudie ensuite la convergence normale sur \mathcal{D}_S .
 - Pour démontrer que $\sum f_n$ converge normalement sur \mathcal{D}_S .
 - (a) Étudier les variations de f_n , déduire du tableau de variation une estimation de $\|f_n\|_{\infty, \mathcal{D}_S}$ et justifier que $\sum \|f_n\|_{\infty, \mathcal{D}_S}$ est convergente. Voir l'Exemple 3 ci-dessous.
 - (b) Majorer $|f_n(x)|$ sur \mathcal{D}_S par une quantité M_n **qui ne dépend pas de x** et telle que $\sum M_n$ converge. Voir l'Exemple 1 ci-dessus.
 - Pour démontrer que $\sum f_n$ converge pas normalement sur \mathcal{D}_S .

- (a) Obtenir une estimation de $\|f_n\|_{\infty, \mathcal{D}_S}$ (tableau de variation, ou minoration) et justifier que $\sum \|f_n\|_{\infty, \mathcal{D}_S}$ est divergente. Voir [Exemple 4](#) et [Exemple 7](#).
- (b) Trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_S$ telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge. Voir [Exemple 2](#) ci-dessus, [Exemple 6](#) et [Exemple 8](#) ci-dessous.
- (c) Si la série ne converge pas absolument, alors la série ne converge pas normalement. Voir l'[Exemple 5](#) ci-dessous.
3. Si la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement, alors il faut étudier la convergence uniforme directement, i.e. sans passer par l'implication CVN \implies CVU.

- Pour démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathcal{D}_S .

- (a) Utiliser, si les conditions sont réunies, la majoration du reste “ $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ ” pour les séries alternées, montrer que $\|f_{n+1}\|_{\infty, \mathcal{D}_S} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et en déduire que $\|R_n\|_{\infty, \mathcal{D}_S} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Voir l'[Exemple 5](#) ci-dessous.
- (b) **Cas difficile** : Majorer directement le reste par une méthode qui dépend de la série (comparaison série-intégrale, formule de la somme d'une série géométrique, etc.). Voir l'[Exemple 7](#) ci-dessous.

- Pour démontrer que $\sum f_n$ converge pas uniformément sur \mathcal{D}_S .

- (a) Montrer que $\|f_n\|_{\infty, \mathcal{D}_S} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et conclure grâce à la Proposition [3.7](#). Voir l'[Exemple 6](#) ci-dessous
- (b) Utiliser des propriétés qualitatives : continuité, interversion “ \sum ” et “ f ”, etc. Par exemple, si toutes les fonctions f_n sont continues et qu'on peut prouver que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ n'est pas continue, alors la convergence ne peut pas être uniforme ; Voir l'[Exemple 4](#) ci-dessous ; Plus de détails dans la section suivante.
- (c) **Cas difficile** : Minorer directement le reste par quelque chose qui ne tend pas vers 0, ou encore contredire le critère de Cauchy uniforme. Nous montrerons la plupart du temps l'existence de $a > 0$, de deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (par exemple $p_n = n$ et $q_n = 2n$), et de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_S$ tels que

$$\left| \sum_{k=p_n}^{q_n} f_n(x_k) \right| \geq a,$$

ce qui contredit le critère de Cauchy uniforme, et donc la convergence n'est peut être uniforme sur \mathcal{D}_S . Voir l'[Exemple 8](#) ci-dessous.

Exemple 3.

Soit $\sum_{n \geq 1} f_n$ la série de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)}{n}$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement et absolument vers 0. En effet, les fonctions f_n sont positives donc convergence simple et absolue correspondent sont identiques. Ensuite on a :
 - Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$ d'où la convergence de $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ et $\sum_{n \geq 1} f_n(1)$.
 - Puis si $x \in]0, 1[$, alors $|f_n(x)| = f_n(x) \leq x^n$, ce qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Par comparaison, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- Pour étudier la convergence normale, nous allons effectuer une étude de fonction. Commençons

par calculer la dérivée de f_n :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'_n(x) = \frac{1}{n}(nx^{n-1}(1-x) - x^n) = \frac{x^{n-1}}{n}(n - (n+1)x).$$

On a alors $f'_n(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{n}{n+1}$. Un tableau de variation montre ensuite que la fonction f_n atteint son maximum en $x_n = \frac{n}{n+1}$, d'où :

$$\|f_n\|_{\infty, [0,1]} = |f_n(x_n)| = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Or,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Nous en déduisons que $\|f_n\|_{\infty, [0,1]} \sim \frac{e^{-1}}{n^2}$, et donc la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [0,1]}$ est convergente par comparaison à une série de Riemann convergente. D'où la convergence normale et, par suite, convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exemple 4.

Soit $\sum_{n \geq 1} f_n$ la série de fonctions avec $f_n(x) = x^n(1-x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous reprenons les mêmes étapes que ci-dessus, avec moins de détails sur la première partie.

- La majoration $f_n(x) = |f_n(x)| \leq x^n$ sur $[0, 1[$ ainsi que $f_n(1) = 0$ montrent que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement et absolument.
- Pour étudier la convergence normale on calcule la dérivée de f_n :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x).$$

On a alors $f'_n(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{n}{n+1}$. Un tableau de variation montre ensuite que la fonction f_n atteint son maximum en $x_n = \frac{n}{n+1}$, d'où :

$$\|f_n\|_{\infty, [0,1]} = |f_n(x_n)| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sim \frac{e^{-1}}{n}.$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [0,1]}$ est divergente par comparaison à une série de Riemann divergente. Donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.

- Pour étudier la convergence uniforme, nous pouvons remarquer que $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, i.e. la différence de deux séries géométriques. Ainsi, nous pouvons déterminer une expression pour la somme de cette série (on pourrait aussi reconnaître une somme télescopique) :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x - x^2}{1 - x} = x.$$

Pour $x = 1$ et $n \geq 1$ nous avons $f_n(1) = 0$, d'où $S(1) = 0$. On observe donc que

- S est discontinue en $x = 1$, alors que
- f_n est continue en $x = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Ainsi la convergence ne peut pas être uniforme, sinon la continuité en 1 serait conservée.

Exemple 5: (TD2 - Exercice 4.3).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$.

- **CVS** : Nous reconnaissons une série alternée, nous allons donc tenter d'appliquer le critère adapté. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la suite $\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante vers 0. Ainsi, le critère de séries alternées implique la convergence de $\sum f_n(x)$. On a donc convergence simple sur \mathbb{R}_+ .
- **CVA** : Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0$, et donc il y a bien-sûr convergence absolue en $x = 0$. En revanche, si $x > 0$ alors on détermine un équivalent :

$$|f_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) = \frac{x}{n(1+x)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{x}{1+x} \frac{1}{n}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge par le critère de Riemann. Par comparaison, il n'y a pas convergence absolue sur \mathbb{R}_+^* .

- **CVN** : Puisqu'il n'y a pas CVA sur \mathbb{R}_+ , il ne peut y avoir CVN sur \mathbb{R}_+ .
- **CVU** : Pour étudier la convergence uniforme d'une série alternées, nous utilisons la majoration du reste donnée par le critère des séries alternées :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \left| \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \right| \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où la convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Exemple 6: (TD2 - Exercice 2.1).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^3x}$.

- **CVS et CVA** : Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0$, d'où la série $\sum f_n(0)$ converge. Puis si $x > 0$ alors on a $f_n(x) = |f_n(x)| \sim \frac{nx^2}{n^3x} = \frac{x}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (par le critère de Riemann). D'où la convergence simple et absolue sur \mathbb{R}_+ .
- **Non CVU et non CVN** : Nous allons minorer $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$ à l'aide de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $x_n = n^2$. En effet :

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq |f_n(x_n)| = \frac{nn^4}{1+n^3n^2} = \frac{n^5}{1+n^5} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par conséquent $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui montre que la série $\sum f_n$ ne converge ni uniformément, ni normalement sur \mathbb{R}_+ .

Exemple 7: (TD2 - Exercice 6).

Pour $n \geq 2$, on considère $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+n^2x^2)\ln n}$.

- **CVS et CVA** : La série $\sum f_n(x)$ étant à termes positifs pour $x \in \mathbb{R}_+$, convergence simple et absolue sont équivalentes ici.

- On a $f_n(0) = 0$, donc la série $\sum f_n(x)$ converge pour $x = 0$.
- Et pour $x > 0$, $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x \ln n}$ quand $n \rightarrow \infty$, qui est le terme général d'une série convergente (série de Bertrand).

D'où la convergence simple sur \mathbb{R}_+ de $\sum_{n \geq 0} f_n$.

- **CVN** : On réalise une étude de fonction. On calcule la dérivée :

$$f'_n(x) = \frac{1 + n^2 x^2 - 2n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Donc (tableau de variation) :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n \ln n}.$$

Par conséquent la série $\sum \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)|$ diverge et ainsi pas de convergence normale sur \mathbb{R}_+ .

- **CVU** : Dans un premier temps, nous pouvons essayer de chercher des suites $(x_n)_n$ telles que le terme général $f_n(x_n)$ ne tend pas 0 (les tests classiques : $x_n = \frac{1}{n}$, n , etc). Ici, nous ne parvenons pas à trouver de tel exemple. Nous allons donc nous intéresser à montrer la convergence uniforme par comparaison série-intégrale.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k \geq n+1} \frac{x}{(1 + k^2 x^2) \ln k} \right| \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{1 + k^2 x^2}.$$

Or, la fonction $y \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{1+x^2 y^2}$ est décroissante et positive. On peut donc comparer la somme ci-dessus avec une intégrale :

$$\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{1 + k^2 x^2} \leq \int_n^\infty \frac{1}{1 + y^2 x^2} dy.$$

Donc

$$\sum_{k \geq n+1} \frac{x}{1 + k^2 x^2} \leq \int_n^\infty \frac{x}{1 + y^2 x^2} dy = \int_{nx}^\infty \frac{1}{1 + z^2} dz = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan(z)]_{nx}^A = \frac{\pi}{2} - \arctan(nx).$$

Ainsi

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} R_n(x) \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où la convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ de $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Exemple 8: (TD2 - Exercice 8).

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

- **CVS et CVA** : $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = |f_n(x)| \sim \frac{x}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit qu'il y a convergence simple et absolue sur \mathbb{R}_+ .
- **CVN** : On a $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq |f_n(n)| = \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ est divergente par le critère de Riemann, donc la série $\sum \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$ diverge par comparaison, i.e. pas de convergence normale sur \mathbb{R}_+ .

- **CVU** : Pour démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme, nous allons minorer le reste. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2 + x^2} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2 + x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{k^2 + x^2}.$$

On a donc :

$$\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq |R_n(n)| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 + n^2}.$$

Or, si $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, alors $\frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{n}{n^2+n^2} \geq \frac{1}{5n}$. On en déduit que

$$\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{5n} \geq \frac{1}{5} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ . On aurait aussi pu affirmer que les lignes ci-dessus contredisent le critère de Cauchy uniforme.

2 Propriétés de la somme

Dans toutes les sections à venir, on se limite à l'énoncé des résultats, la preuve étant une simple application aux suites de fonctions sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des théorèmes vus dans le premier chapitre.

2.1 Convergence uniforme et caractère borné

Proposition 3.13

Si $\sum_n f_n$ converge uniformément vers sur X , et si les fonctions f_n sont bornées sur X , alors la somme de la série S est bornée sur X .

2.2 Interspersion somme et limite

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ appartenant à \bar{I} (i.e. appartenant à I ou à son bord). Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans \mathbb{K} .

Théorème 3.14: Limites finies.

On suppose que :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$.

Alors :

- la série $\sum \ell_n$ est convergente ;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$, c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f_n(x).$$

Exemple 3.15 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. On a déjà vu que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$. De plus, chaque fonction f_n a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, à savoir 0. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)^n}{x+n} = \frac{(-1)^n}{n}$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'autre part, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$.

Méthode : Dans certains exercices, nous ne pouvons pas utiliser le théorème ci-dessus car la série de fonction ne converge pas uniformément sur tout l'intervalle. Il faut donc utiliser d'autres techniques. Nous en présentons ci-dessous une méthode qui permet de montrer que la limite de S vaut $+\infty$. En résumé, il s'agit de minorer la somme par une somme partielle, puis prendre la limite sur la somme partielle (on peut toujours intervertir une limite avec une somme finie). Cela fonctionne uniquement si la limite de la somme partielle peut-être rendue arbitrairement grande.

Exemple 3.16 : Pour tout $n \geq 1$, on note $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{(n+n^2x)}$ et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. On laisse en exercice la démonstration des faits suivants :

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement et absolument sur \mathbb{R}_+^* ;
- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
- En revanche, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

Nous allons démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$. Nous ne pouvons pas utiliser le théorème d'interversion somme et limite puisque la convergence n'est pas uniforme autour de 0. On utilise alors une

minoration avec une somme finie :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k + k^2x)}.$$

On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k + k^2x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique). Ainsi, le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus peut être rendu arbitrairement grand. Nous en déduisons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$.

Remarque : En toute rigueur, il faudrait commencer par justifier que $S(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow 0^+$. Cela peut être réalisé en remarquant que toutes les fonctions f_n sont décroissantes, et donc que S est également décroissante.

2.3 Convergence uniforme et continuité

Soit $a \in X$ et $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de X dans \mathbb{K} .

Corollaire 3.15

Si :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a ;
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X .

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a .

Corollaire 3.16

Si :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X ;
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X .

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X .

On a également la version suivante, très utile en pratique.

Proposition 3.17

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de I dans \mathbb{K} . Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

2.4 Convergence uniforme et intégration sur un segment

Dans toute cette section, on considère deux réels a et b vérifiant $a \leq b$.

Théorème 3.18: Intersion somme et intégrale.

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$,
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

Alors $\sum F_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, où $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$. En particulier :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

2.5 Convergence uniforme et dérivation

Dans cette section, I désignera un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

Théorème 3.19

On suppose ici que I est un intervalle quelconque. Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
- S est de classe \mathcal{C}^1 sur I avec $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$, i.e.

$$S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

Exercice : Énoncer un théorème concernant la conservation du caractère \mathcal{C}^k sur I de la somme d'une série de fonction. Vous pouvez vous inspirer du théorème ci-dessus et de celui concernant les suites de fonctions, i.e. le Corollaire 1.18.

3 Un exemple fondamental : la fonction zêta de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln(n)}$. Nous allons chercher à étudier la série de fonctions $\sum f_n$.

Objectif 1 :

Justifier que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. Puis, montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

On définit alors *la fonction zêta de Riemann* $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ comme la fonction donnée par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Objectif 2 :

Montrer que ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$, et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En déduire que ζ est décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$.
Montrer également que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

Notre prochain but est de déterminer un comportement plus précis de cette fonction au bord de son domaine de définition. Pour cela, nous allons utiliser des arguments de comparaisons “série-intégrale”. Pour commencer, nous avons les inégalités suivantes par monotonie :

$$\forall x > 0, \forall n \geq 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt.$$

Nous en déduisons par somme :

$$\forall x > 1, \forall N \geq 2, \quad \frac{1}{(x-1)N^{x-1}} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{(x-1)(N-1)^{x-1}}.$$

Objectif 3 :

En utilisant ces dernières inégalités avec $N = 2$, montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.
De même, montrer que $\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$ via le cas $N = 3$.

Nous allons maintenant montrer que nous pouvons étendre la fonction ζ sur un domaine plus large que $]1, +\infty[$. Pour cela nous considérons la série de fonctions $\sum g_n$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Objectif 4 :

Montrer que la série $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et que sa somme S vérifie :

$$\forall x > 1, \quad \eta(x) - S(x) = \frac{1}{2^{x-1}} \zeta(x).$$

Nous déduisons du précédent objectif une nouvelle formule pour la fonction ζ :

$$\forall x > 1, \quad \frac{1}{1 - 2^{1-x}} S(x).$$

Or cette dernière expression a un sens sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$, ce qui nous permet de prolonger ζ sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$.

Pour aller plus loin : Grâce à des techniques d'analyse complexe (cours de L3), la fonction zêta de Riemann peut en fait être prolongée à tout le plan complexe privé de 1. La position de ses zéros complexes (i.e. les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\zeta(z) = 0$) est liée à la répartition des nombres premiers. Il n'est pas très difficile de montrer que ζ s'annule pour tous les entiers de la forme $-2k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ces zéros sont appelés les zéros triviaux.

L'hypothèse de Riemann selon laquelle tous les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann sont de partie réelle égale à $1/2$ renforce encore l'intérêt pour ces zéros. Il s'agit de l'un des 7 problèmes du millénaire dont la résolution rapporte un prix d'un million de dollars américains offert par l'institut Clay. Les recherches sur la fonction zêta constituent un domaine extrêmement technique, nécessitant une formation spécialisée en "théorie analytique des nombres".

Chapitre 4

Séries entières

Motivation : Vous connaissez la formule qui donne la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Cette formule est valable sur le domaine de convergence simple de la série $\sum f_n$, où $f_n(x) = x^n$, i.e. sur $] -1, 1[$. De manière similaire, vous avez certainement déjà vu la formule suivante pour la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On peut alors se demander : Qu'ont-elles de spéciales, ces deux fonctions, pour admettre une telle écriture ? Ou encore, plus précisément :

Questions :

Quelles sont les fonctions f qui admettent une écriture de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{où } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ?$$

Quelles sont les propriétés d'une telle fonction ? Et quels liens avec les développements limités et les formules de Taylor ?

Le but de ce cours est de répondre à toutes ces questions.

1 Séries entières et rayon de convergence

1.1 Définition d'une série entière

Définition 4.1

On appelle *série entière* toute série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$. On notera abusivement $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ à la place de $\sum f_n$.

Remarque : Il est important de remarquer que les fonctions $f_n : z \mapsto a_n z^n$ sont définies sur \mathbb{C} , ce qui diffère des chapitres précédents. Cependant, dès lors que des propriétés telles que la dérivabilité ou l'intégrabilité seront impliquées, nous nous restreindront à des fonctions définies sur $\mathbb{R} : f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto a_n x^n \in \mathbb{C}$. Cela nous permettra en particulier d'appliquer les résultats démontrés précédemment.

Exemples 4.17 :

- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n i z^n$ sont des séries entières.
- $\sum_{n \geq 0} n z^{2n}$ est également une série entière. En effet, il s'agit bien d'une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

On parle d'une *série entière lacunaire* lorsque qu'il y a des "trous" ($a_n = 0$ pour certains n) réguliers dans la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, exactement comme dans le dernier exemple ci-dessus.

- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1+|z|n^2}$ n'est pas une série entière.

1.2 Rayon de convergence et somme d'une série entière

Lemme 4.2: Lemme d'Abel.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n \alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \alpha$, on a $a_n z^n = O\left(\left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n\right)$.
En particulier, pour $|z| < \alpha$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n \alpha^n| \leq M$. On peut donc écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n,$$

ce qui est le résultat attendu.

De plus, $|z|/\alpha \in [0, 1[$, donc la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n$ converge, et la série $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$ converge également par comparaison. \square

Théorème - Définition 4.3

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. On pose :

$$R := \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \sup\{r \geq 0 : \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}.$$

On appelle R le *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, et on a :

- Si $R = +\infty$ alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente sur \mathbb{C} .
- Si $R = 0$ alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge pour $z = 0$ et diverge grossièrement sinon.
- Si $R \in]0, +\infty[$ alors $\begin{cases} |z| < R & \implies \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R & \implies \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$

Démonstration. Commençons par démontrer la première égalité, i.e. que

$$\sup\{r \geq 0 : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \sup\{r \geq 0 : \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}.$$

Premièrement, les deux ensembles qui apparaissent ci-dessus sont non vides car $r = 0$ appartient à ces derniers. Les sup sont donc bien définies. Puis, si $r \geq 0$ est tel que $\sum a_n r^n$ converge absolument, alors $a_n r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc nécessairement $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Cela démontre que

$$\{r \geq 0 : \sum a_n r^n \text{ converge}\} \subset \{r \geq 0 : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

et par suite

$$\sup\{r \geq 0 : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \geq \sup\{r \geq 0 : \sum a_n r^n \text{ converge}\}.$$

L'inégalité dans l'autre sens est une conséquence du Lemme d'Abel. En effet, si $r \geq 0$ est tel que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum a_n r'^n$ converge absolument pour tout $r' < r$. On en déduit que :

$$\sup\{r \geq 0 : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \leq \sup\{r \geq 0 : \sum a_n r^n \text{ converge}\}.$$

Ensuite, tous les énoncés concernant la convergence absolue sont des conséquences directes de la (deuxième) définition de R . Montrons pour terminer que si $R < +\infty$ et si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. En effet, puisque $|z| > R$, la suite $(a_n |z|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Ainsi la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, d'où $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Remarques :

1. En général, on ne peut donc rien affirmer quant au comportement de la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ lorsque $|z| = R$. Il peut arriver que cette série soit absolument convergente, semi-convergente, ou encore divergente. Nous verrons dans la suite.
2. Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$ ont le même rayon.

Définition 4.4

De plus, le disque ouvert $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ s'appelle *le disque de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemples 4.18 :

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ est $R = 1$. En effet, si $|z| < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^n$ est (absolument) convergente, ce qui implique que $R \geq 1$. En revanche cette même série diverge pour tout $z \geq 1$, ce qui implique que $R \leq 1$. Au final, on a bien $R = 1$.
2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$ puisque la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge vers e^z , pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} n! z^n$ est $R = 0$. En effet, si $r > 0$ alors

$$n! r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Définition 4.5

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R . On appelle *somme de la série entière* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ l'application $S : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Par exemple, pour la série entière $\sum z^n$, on a pour tout $z \in D_1$, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Corollaire 4.6: Convergence normale.

On considère une série entière, de terme général $a_n z^n$ et de rayon de convergence R . Si $r < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Démonstration. Soit $r < R$ et soit $z \in \overline{D}_r$. Alors $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$. Donc

$$\|a_n z^n\|_{\infty, \overline{D}_r} = \sup\{|a_n z^n| : z \in \overline{D}_r\} = \sup\{|a_n| |z|^n : z \in \overline{D}_r\} \leq |a_n| r^n.$$

Comme $r < R$, $\sum |a_n| r^n$ converge, d'où la convergence normale de $\sum a_n z^n$ sur \overline{D}_r . \square

Remarque : $\triangle!$ Il se peut qu'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon R ne converge pas normalement (ni même uniformément) dans le disque ouvert D_R . En effet, la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ a pour rayon 1, cependant, $\sup_{|z| < 1} |z^n| = 1$ et il n'y a donc pas convergence normale sur D_1 .

2 Détermination du rayon de convergence

2.1 Règle de d'Alembert

Proposition 4.7

S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$, et si

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, +\infty],$$

alors le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$, avec les conventions usuelles :

" $\frac{1}{0} = +\infty$ " et " $\frac{1}{+\infty} = 0$ ".

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Écrivons

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \rightarrow \ell |z|.$$

Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors $\ell |z| < 1$ et la règle de d'Alembert pour les séries numériques assure la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. D'où $R \geq \frac{1}{\ell}$. Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge, toujours d'après le même critère. On en conclut que $R \leq \frac{1}{\ell}$ et donc $R = \frac{1}{\ell}$. \square

Exemples 4.19 : Déterminons le rayon de convergence des séries ci-dessous.

- $\sum a_n z^n = \sum \frac{n^n}{n!} z^n$. On a :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

Par conséquent, $R = \frac{1}{e}$.

- $\sum a_n z^n = \sum (-1)^n \frac{n + \ln(n)}{n^2} z^n$. On a :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1 + \ln(n+1)}{(n+1)^2} \frac{n^2}{n + \ln(n)} \sim \frac{n}{n^2} \frac{n^2}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

D'où $R = 1$.

⚠ Attention aux séries entières lacunaires, pour lesquelles il faut revenir à la règle de d'Alembert classique !

- Montrons que la rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^{n+n}} z^{4n}$ est $(3/2)^{\frac{1}{4}}$. On applique la règle de d'Alembert classique :

$$\frac{2^{n+1} |z|^{4(n+1)}}{3^{n+1}} \frac{3^n + n}{2^n |z|^{4n}} = \frac{3^n + n}{3^{n+1} + n + 1} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{|z|^{4n+4}}{|z|^{4n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} |z|^4.$$

Si $\frac{2}{3} |z|^4 < 1$, i.e. si $|z| < (3/2)^{\frac{1}{4}}$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^{n+n}} z^{4n}$ converge. D'où $R \geq (3/2)^{\frac{1}{4}}$.

Si $|z| > (3/2)^{\frac{1}{4}}$, alors $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^{n+n}} z^{4n}$ diverge, ce qui implique que $R \leq (3/2)^{\frac{1}{4}}$.

Au final, $R = (3/2)^{\frac{1}{4}}$.

2.2 Règle de Cauchy

Proposition 4.8

La rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}} \quad (\text{avec les conventions usuelles}).$$

Démonstration. On applique la règle de Cauchy pour les séries numériques.

Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n| |z^n|)^{1/n} < 1$ alors la série de terme général $a_n z^n$ converge. Or

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n| |z^n|)^{1/n} = |z| \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}.$$

On en déduit que si $|z| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}$, la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument. Donc

$$R \geq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}.$$

Par ailleurs, si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n| |z^n|)^{1/n} > 1$, c'est à dire si $|z| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}$, alors le terme général

$a_n z^n$ de la série ne tend pas vers zéro et la série diverge grossièrement. Donc

$$R \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}.$$

Les 2 inégalités prouvent la proposition. \square

Exemple 4.20 : La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^n}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$. En effet, si on applique la règle de Cauchy pour les séries entières :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et donc } R = +\infty.$$

⚠ Comme pour le critère de d'Alembert, si la série est lacunaire alors il est préférable de revenir au critère de Cauchy classique. En effet, si on considère par exemple $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{2^n}$, alors on écrit :

$$\left(\frac{|z|^{2n}}{2^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|z|^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{2}.$$

Si $\frac{|z|^2}{2} < 1$, i.e. si $|z| < \sqrt{2}$, alors la série converge absolument. Si $\frac{|z|^2}{2} > 1$, i.e. si $|z| > \sqrt{2}$, alors la série diverge grossièrement. **Conclusion :** $R = \sqrt{2}$.

2.3 Comparaisons de rayons

Proposition 4.9

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a, R_b . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$. Par définition, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ converge absolument. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument. Par conséquent $|z| \leq R_a$. Le raisonnement précédent démontre que $[0, R_b[\subset [0, R_a]$, d'où $R_a \geq R_b$. \square

Corollaire 4.10

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a, R_b .

1. Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.
2. Si $|a_n| = O(|b_n|)$ alors $R_a \geq R_b$.
3. Si $|a_n| = o(|b_n|)$ alors $R_a \geq R_b$.

Exemples 4.21 :

1. $\sum_{n \geq 0} e^{\sin n} z^n$ a pour rayon de convergence 1 car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{-1} \leq e^{\sin n} \leq e,$$

et les séries entières $\sum_{n \geq 0} e^{-1} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} e z^n$ ont pour rayon 1.

2. $\sum_{n \geq 0} ((1 + 1/n)^n - e)z^n$ a pour rayon un 1 car

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e = e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - e = e\left(e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \sim \frac{-e}{2n},$$

et la série entière $\sum \frac{-e}{2n} z^n$ a pour rayon de convergence 1.

3 Opérations sur les séries entières

3.1 Structure vectorielle

Proposition 4.11: Combinaisons linéaires

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b , et de sommes respectives notées S_a et S_b . Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

1. La série de fonctions $\sum \lambda a_n z^n$ et une série entière de rayon de convergence $R_{\lambda a} = R_a$. De plus $S_{\lambda a}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \lambda S_a(z)$.

2. La série de fonctions $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.

De plus :

- $|z| < \min(R_a, R_b) \implies S_{a+b}(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = S_a(z) + S_b(z)$.
- Si $R_a \neq R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Démonstration. La plupart des propriétés ci-dessus sont des simples conséquences des définitions et de la linéarité de la somme " $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ". Nous ne démontrons que les énoncés concernant R_{a+b} .

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Par définition, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. Par somme, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument et donc $r \leq R_{a+b}$. On en déduit que $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.
- Supposons maintenant $R_a \neq R_b$. Quitte à inverser les rôles, nous supposons que $R_a < R_b$. Soit alors $r > 0$ tel que $R_a < r < R_b$. Alors, par définition, la série $\sum a_n r^n$ diverge grossièrement, alors que la série $\sum b_n r^n$ converge absolument. Par somme, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge grossièrement. Donc $r \geq R_{a+b}$. On en déduit que $R_{a+b} \leq R_a = \min(R_a, R_b)$. L'autre inégalité étant déjà démontrée, cela achève la démonstration. □

Remarques : Bien évidemment, si $\lambda = 0$, alors $R_{\lambda a} = +\infty$ et $S_{\lambda a} = 0$. De plus lorsque $R_a = R_b$, il se peut que $R_{a+b} = R_a = R_b$ ou que $R_{a+b} > R_a$; Voir les exemples ci-dessous.

Exemples 4.22 :

1. $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n z^n$ ont pour rayon 1 et leur série entière somme $\sum_{n \geq 0} (n+1) z^n$ également.
2. $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} (2^{-n} - 1) z^n$ sont de rayons 1 et la somme $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} z^n$ a pour rayon 2.
3. $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} -z^n$ sont de rayons 1 et la série entière somme $\sum_{n \geq 0} 0 z^n$ a pour rayon $+\infty$.

3.2 Produit

On rappelle que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries numériques, alors *le produit de Cauchy* de cette série est la série numériques $\sum w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. Il a été démontré au S3 qui si

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ également, et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Définition 4.12

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. On appelle *série entière produit* (ou *produit de Cauchy*) de ces deux séries entières la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Remarque : On peut retrouver l'expression de c_n via le calcul "formel" :

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + \dots$$

La proposition suivante est une conséquence du résultat sur le produit de Cauchy de séries numériques mentionné un peu plus haut.

Proposition 4.13

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. Soit $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ la série entière produit correspondante, de rayon et de somme notés R_{ab}, S_{ab} . On a :

1. $R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \min(R_a, R_b) \implies S_{ab}(z) = S_a(z)S_b(z)$.

Remarque : Même si $R_a \neq R_b$, on peut avoir $R_{ab} > \min(R_a, R_b)$. En effet, si $\sum a_n z^n = \sum z^n$ et $\sum b_n z^n = 1 - z + \sum_{n \geq 2} 0 z^n$, alors on a $R_a = 1$ et $R_b = +\infty$. En revanche, $\sum c_n z^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 0 z^n$ et donc $R_{ab} = +\infty$.

3.3 Séries dérivées et primitives formelles

Définition 4.14

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

- On appelle *série entière dérivée* de cette série entière la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ (ou encore $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$).
- On appelle *série entière primitive* de cette série entière la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ (ou encore $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$).

Les définitions ci-dessus sont purement formelles. Elle n'ont, pour l'instant, pas de liens démontrés avec la dérivation et l'intégration de fonctions. L'objectif de la prochaine partie et justement

d'effectuer ce lien dans le cadre de la variable réelle. Mais avant cela, comparons le rayon de convergence de ces séries avec celui de la série de départ. Nous laissons la preuve en exercice.

Proposition 4.15

La série entière dérivée et la série entière primitive d'une série entière ont le même rayon de convergence que celle-ci.

4 Propriétés de la somme d'une série entière

Dans cette partie, nous nous restreignons au cas d'une variable réelle $x \in \mathbb{R}$, mais les coefficients a_n peuvent toujours appartenir à \mathbb{C} . Nous avons vu, lors du Corollaire 4.6, qu'une série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout disque fermé \overline{D}_r avec $r < R$. Comme $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $\overline{D}_r = [-r, r]$. En exploitant alors les résultats du chapitre sur les séries de fonctions, nous obtenons les propriétés suivantes sur la somme d'une série entière.

Théorème 4.16

Si S la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, alors :

1. S est continue sur $] -R, R[$;
2. S est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, et pour tout $x \in] -R, R[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

3. La primitive de S s'annulant en 0 est donnée par la fonction $x \in] -R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Dans le point 2., on parle de dérivation terme à terme de la somme d'une série, alors qu'on parle d'intégration terme à terme dans le point 3. Voyons rapidement les principaux ingrédients de la démonstration.

Démonstration. Le premier point est une conséquence du second. Le second point découle des faits suivants :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ avec :

$$\forall x \in] -R, R[, \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

- Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, la série $\sum f^{(k)}$ converge normalement sur tout intervalle $[-r, r]$ dès que $0 \leq r < R$.

On applique alors le Théorème 3.19 de dérivation des sommes (soit successivement, soit une version \mathcal{C}^k) pour en déduire le second point. La formule $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ s'obtient en évaluant la formule donnant l'expression de $S^{(k)}$ en $x = 0$. Enfin, de manière assez similaire, le troisième point est une application directe du Théorème 3.18 d'intégration des sommes. Nous laissons les détails au lecteur. \square

Exemple 4.23 : La série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ a pour rayon 1 et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$(\star) : \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Par dérivation de (\star) , nous en déduisons la formule suivante :

$$x \in]-1, 1[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

De même, par intégration terme à terme de (\star) , nous obtenons :

$$x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Corollaire 4.17: Unicité des coefficients.

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières telles que $R_a > 0$ et $R_b > 0$. Si il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]-r, r[$, $S_a(x) = S_b(x)$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. D'après le théorème précédent, on a $a_n = \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!} = \frac{S_b^{(n)}(0)}{n!} = b_n$, d'où le résultat. \square

Corollaire 4.18: Développements limités en 0 de la somme.

Si S est la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S admet le développement limité en 0 à l'ordre n ci-dessous :

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire que $S(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$, puis d'observer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = o(x^n)$ lorsque $x \rightarrow 0$. \square

Le Théorème 4.16 montre que la somme d'une série entière possède d'excellentes propriétés sur son ouvert de convergence $] -R, R[$. En revanche, le comportement au bord du domaine, i.e. en $x = -R$ et $x = R$, est incertain. Des choses très différentes peuvent se produire, par exemple :

- La série peut converger normalement sur tout l'intervalle $[-R, R]$, comme $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$;
- La série peut converger en $-R$ mais pas en R (ou inversement), comme $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- La série peut diverger en $x = -R$ et $x = R$, comme $\sum_{n \geq 1} x^n$.

Dans le cas où la série converge au bord du domaine, le théorème suivant nous donne la continuité de la somme en ce bord. Il consiste à passer la limite sous le signe somme.

Théorème 4.19: Théorème radial d'Abel.

Soit S la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge, alors la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$.

Par conséquent, S est continue en $x = R$ (respectivement en $x = -R$), i.e. :

$$\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Le même énoncé en $x = -R$ est bien évidemment valable lorsque la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$ converge. Aussi, remarquons que si de plus $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors le résultat est facile à démontrer. En effet, il suffit de montrer que la série converge normalement sur $[0, R]$ via la majoration :

$$\|x \mapsto a_n x^n\|_{\infty, [0, R]} \leq a_n R^n.$$

Dans le cas général, il faut utiliser une transformation d'Abel comme ci-dessous.

Démonstration. La conséquence sur la continuité découle du fait que les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues, ce qui permet d'appliquer Corollaire 3.15. Nous allons montrer que la série vérifie le critère de Cauchy uniforme, ce qui implique bien qu'elle converge uniformément. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On commence par écrire :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

On effectue alors une transformation d'Abel pour majorer

$$S_{N+p}(x) - S_N(x) = \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k x^k = \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

On pose $\sigma_{N,n} = \sum_{i=N}^n a_i R^i$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{N+p}(x) - S_N(x) &= \sum_{k=N+1}^{N+p} (\sigma_{N,k} - \sigma_{N,k-1}) \left(\frac{x}{R}\right)^k = \sum_{k=N+1}^{N+p} \sigma_{N,k} \left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=N}^{N+p-1} \sigma_{N,k} \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \\ &= \sigma_{N,N+p} \left(\frac{x}{R}\right)^{N+p} - \sigma_{N,N} \left(\frac{x}{R}\right)^{N+1} + \sum_{k=N+1}^{N+p-1} \sigma_{N,k} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right]. \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ étant convergente, elle vérifie le critère de Cauchy :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_0, \forall n \geq N_0, |\sigma_{N,n}| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme $x \in [0, R]$, les termes $\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}$ sont positifs. Donc,

$$|S_{N+p}(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{N+p} + \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{N+1} + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{N+p-1} \left\{ \left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \right\} = 2\varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{N+1} \leq 2\varepsilon.$$

Donc le critère de Cauchy uniforme est vérifié. \square

5 Fonctions développables en séries entières

5.1 Généralités

Définition 4.20: Développement en série entière

Soit $R > 0$ et $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est *développable en série entière* (DSE) sur $] - R, R[$ s'il existe une suite de réels $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\forall x \in] - R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit aussi que f est *développable en série entière en 0*, ou au voisinage de 0 (ou encore est *analytique en 0*), s'il existe $R > 0$ tel que f est développable en série entière sur $] - R, R[$. Ainsi une fonction développable en série entière n'est rien d'autre qu'une fonction qui peut s'écrire comme la somme d'une série entière sur un intervalle ouvert contenant 0.

Remarque : Bien-sûr, la notion de fonction développable en série entière en $a \neq 0$ existe. Mais tout comme pour les développements limités, l'étude des fonctions DSE en un point quelconque se ramène à celle des fonctions DSE en 0 par un changement de variable. On va donc se restreindre à l'étude de ces dernières.

La proposition suivante découle des propriétés de la somme d'une série entière, i.e. du Théorème 4.16.

Proposition 4.21: DSE $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$.

Si f est développable en série entière sur $] - R, R[$ alors f est \mathcal{C}^∞ sur $] - R, R[$ et si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et donc le DSE est unique.

Exemples 4.24 : Nous avons déjà mentionner dans l'introduction de ce chapitre que la fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est DSE au voisinage de 0. En effet, on a :

$$\forall x \in] - 1, 1[, (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}.$$

On en déduit donc que

$$\forall x \in] - 1, 1[, \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^{n+1}} \sum_{k=0}^n x^k.$$

On passe à la limite $n \rightarrow +\infty$ pour en déduire :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Aussi par dérivation et intégration terme à terme de cette dernière formule, nous pouvons affirmer que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ sont DSE au voisinage de 0, avec :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n}.$$

Nous terminons avec une proposition concernant la parité.

Corollaire 4.22: Parité, imparité.

Une fonction f développable en série entière en 0 est paire (resp. impaire) si et seulement si tous les coefficients d'ordre impair (resp. pair) de son développement sont nuls. Autrement dit :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} \quad (\text{resp. } f(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1}).$$

Démonstration. Si f est pair, alors f' est impair, et donc $f'(0) = 0$. Par récurrence on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$. Or, nous avons vu que si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Par conséquent, on a $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. \square

5.2 Série de Taylor

Définition 4.23

Soit f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée *série de Taylor* de f en 0.

Ainsi, si f est développable en série entière en 0, son développement de Taylor correspond à son développement en série entière.

Question :

Si f est \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, alors est-ce que f est DSE sur $] -R, R[$?

Malheureusement, le fait que f soit infiniment dérivable sur un intervalle $] -R, R[$ ne suffit pas à assurer que cette fonction soit développable en série entière, même si sa série de Taylor converge !

Il a fallu un certain temps aux mathématiciens pour s'en rendre compte puisque, avant les travaux d'Abel (1802 - 1829), toutes les fonctions étaient considérées comme développables en série entière!

Exemple 4.25 : Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Il n'est pas très difficile de vérifier que cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On montre en effet par récurrence que si $x \neq 0$ alors $f^{(n)}(x) = Q_n(x)e^{\frac{-1}{x^2}}$, où $Q_n(x)$ est une fraction rationnelle telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Donc si f était développable en série entière, son développement serait sa série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0,$$

ce qui est impossible car f n'est nulle sur aucun intervalle de la forme $] - R, R[$.

Bilan : La fonction f de l'exemple ci-dessus n'est pas DSE en 0 car, même si elle est de classe \mathcal{C}^∞ , elle n'est pas égale à sa série de Taylor (qui converge, mais qui est nulle!). Il y a également des fonctions qui ne sont pas DSE pour une autre raison : la série de Taylor n'est tout simplement pas convergente en dehors de 0 (e.g. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{in^2 x}$).

Il faut donc une condition supplémentaire à l'aspect \mathcal{C}^∞ pour qu'une fonction soit DSE en 0. Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral : si f est \mathcal{C}^∞ sur $] - R, R[$ alors,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{:=S_N(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) dt}_{:=R_N(x)}.$$

Proposition 4.24

Une fonction f est DSE au voisinage de 0 si et seulement si :

- f est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage $] - r, r[$ de 0.
- $\forall x \in] - r, r[, \lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(x) = 0$.

Démonstration. Si f est DSE en 0, alors nous avons déjà démontré que f est \mathcal{C}^∞ et que f est la somme de sa série de Taylor. On a donc $S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$, i.e. $R_n(x) = f(x) - S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Réciproquement, on déduit de la formule de Taylor avec reste intégral que $S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$. Autrement dit, f s'écrit comme la somme d'une série entière (sa série de Taylor), et donc f est bien Développable en série entière. \square

Exemple 4.26 : Vous avez probablement introduit la fonction exponentielle comme l'unique fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. On peut utiliser ces propriétés pour donner le DSE en 0 de exp. En effet, de $f' = f$ on déduit que exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . De

plus, le reste intégral dans la formule de Taylor peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_N(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} e^t dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^N}{N!} \right| e^t dt \leq e^{|x|} \int_0^x \frac{|x-t|^N}{N!} dt \\ &\leq e^{|x|} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

La proposition ci-dessus implique que exp est DSE en 0 avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Donnons à présent une condition suffisante plus simple à vérifier dans certains cas :

Corollaire 4.25: \mathcal{C}^∞ et dérivées bornées \Rightarrow DSE.

Si f est \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et s'il existe une constante M telle que

$$\forall x \in] -R, R[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

alors f est développable en série entière sur $] -R, R[$.

Démonstration. Il suffit de montrer que : $\forall x \in] -R, R[, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(x) = 0$. Or si $x \in [0, R[$, on a :

$$|R_N(x)| \leq M \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} dt = M \left[-\frac{(x-t)^{N+1}}{(N+1)!} \right]_0^x = M \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \leq M \frac{R^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

De même si $x \in] -R, 0[$:

$$|R_N(x)| \leq M \int_x^0 \frac{(t-x)^N}{N!} dt = M \left[\frac{(t-x)^{N+1}}{(N+1)!} \right]_x^0 = M \frac{(-x)^{N+1}}{(N+1)!} \leq M \frac{R^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Exemple 4.27 : La fonction cosinus. Le développement en série entière de cos peut s'obtenir en remarquant que les dérivées successives de $\cos(x)$ sont, au signe près, $\cos(x)$ ou $\sin(x)$. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos^{(n)}(0)| \leq 1.$$

Ainsi le Corollaire 4.25 s'applique. La fonction cosinus est donc développable en série entière sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Or $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$ et $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

De manière parfaitement similaire, on a la formule suivante pour la fonction sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

5.3 Applications

a) Développements usuels

Les formules présentées ci-dessous peuvent être obtenues à partir de la formule de Taylor, en utilisant par exemple la Proposition 4.24 ou encore le Corollaire 4.25. Cependant, il est parfois plus simple de partir d'une formule déjà établie, par exemple celle de la série géométrique, puis de travailler sur l'expression en dérivant, en intégrant, ou encore en effectuant un changement de variable via la proposition suivante :

Proposition 4.26

Si f est DSE en 0, alors les fonctions $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto f(x^2)$ sont DSE en 0. De plus, si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$, alors

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[, \quad f(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}.$$

La démonstration est relativement évidente, elle est laissée en exercice. Ainsi les DSE ci-dessous se déduisent presque tous de trois développements à connaître : $\frac{1}{1-x}$, e^x , $(1+x)^\alpha$.

À partir de la série géométrique :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

- Par intégration terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

- Par dérivation terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

- Puis, on peut ensuite effectuer des changements de variables pour obtenir pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)x^n.$$

- Et ainsi de suite...

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

À partir de la série exponentielle :

À partir de la série géométrique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- Par changement de variable et par somme, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

- On peut également retrouver les formules pour cos et sin grâce à la formule d'Euler. Nous avons vu un peu plus haut qu'elles sont des conséquences assez directes de la formule de Taylor. Cependant, on peut également retrouver ces formules par identification dans la formule d'Euler. Pour cela nous devons admettre que le DSE de exp s'entend à la variable complexe :

$$\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Autour de la formule pour les fonctions puissances $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Premièrement, expliquons comment obtenir cette formule, et pourquoi suppose-t-on $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors nous disposons de la formule du binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Il s'agit donc d'un développement en série entière, de rayon de convergence infini car la somme ne dispose que d'un nombre fini de termes non nuls.

Supposons maintenant que $\alpha \notin \mathbb{N}$. On peut utiliser la même méthode que pour la fonction exponentielle, i.e. celle consistant à appliquer la Proposition 4.24 via la série de Taylor. Nous allons cependant présenter ci-dessous une méthode alternative en passant par une équation différentielle. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. Alors f est solution du problème de Cauchy :

$$(ED) \quad \begin{cases} y' = \frac{\alpha}{1+x} y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Supposons que S est une fonction DSE qui est solution de ce même problème de Cauchy. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors on a $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$, et en injectant ces expressions dans (ED) nous en déduisons que $a_0 = 1$ et :

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + na_n)x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du DSE, on a $\alpha a_n = (n+1)a_{n+1} + na_n$, i.e. $a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}a_n$. On obtient alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} =: \binom{\alpha}{n}.$$

Le critère de d'Alembert montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut $R = 1$. Ainsi, la fonction S , donnée par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{avec } \binom{\alpha}{0} = 1 \text{ et } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!},$$

est solution du problème de Cauchy (ED). Par unicité de la solution (Théorème de Cauchy-Lipschitz), nous avons $f(x) = S(x)$, et donc f est bien DSE en 0, avec la formule annoncée plus haut.

Le DSE que nous venons de démontrer permet par exemple d'obtenir les développements suivants :

- Si $\alpha = -\frac{1}{2}$...

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^n.$$

- ... combiné avec un changement de variable ...

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}.$$

- ... et une intégration terme à terme ...

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

b) Calculs de sommes

Dans la section qui précède, nous cherchions à déterminer l'expression d'un DSE en partant d'une fonction. Ici, c'est un peu le contraire : Nous partons d'une série entière, et nous cherchons à retrouver l'expression de la fonction dont la somme correspond à cette série entière. Cependant, comme vous allez le constater dans l'exemple ci-dessous, il s'agit bien souvent de travailler sur les DSE de références jusqu'à arriver à la série entière recherchée.

Exemple 4.28 : Déterminons la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$.

Le critère de d'Alembert montre facilement que $R = 1$. Par déterminer la somme, on peut partir de la formule

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

que l'on va dérivée successivement pour se rapprocher de la somme à calculer. On effectue une première dérivation pour obtenir :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

On multiplie ensuite cette dernière formule par x , puis on dérive à nouveau terme à terme :

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}.$$

Pour terminer, il suffit de multiplier cette égalité par x :

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n.$$

c) Équations différentielles

Pour déterminer le DSE de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, nous sommes passé par une équation différentielle. Il est en effet parfois plus simple d'utiliser cette méthode plutôt que de calculer les dérivées successives de la fonction. Un autre bon exemple est la fonction donnée par l'expression

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette fonction est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$, ce qui permet de retrouver son DSE (c'est l'objectif de l'exercice 17 de la feuille de T.D.).

D'un autre côté, les sommes de séries entières sont des fonctions faciles à dériver, qui enrichissent notre liste de fonctions "classiques", et qui sont donc tout indiquées pour résoudre des équations différentielles. La démarche générale est parfaitement similaire à ce que nous avons produit pour traiter les fonctions puissances α :

1. On suppose qu'il existe une solution de l'ED qui est DSE, i.e. qui est la somme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. On injecte les expressions de y et de ses dérivés dans l'ED pour obtenir des relations sur les coefficients a_n .
3. On détermine ensuite ces coefficients a_n grâce aux conditions initiales et aux relations de l'étape précédente.
4. On détermine le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue, et si ce rayon est strictement positif, alors nous pouvons vérifier que la somme est bien solution de l'ED recherchée.

Exemple 4.29 : On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Cherchons une solution développable en série entière sur un certain $] -r, r[$, $r > 0$. Posons donc

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ si } x \in] -r, r[. \text{ Alors, } \forall x \in] -r, r[:$$

$$\begin{aligned} xy &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ y' &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ y'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \\ xy'' &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 0 &= xy'' + y' + xy \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n \\
 &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} \right] x^n
 \end{aligned}$$

D'après l'unicité du développement en série entière, il vient :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Or, $a_0 = y(0) = 1$, d'où

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2}$$

De même $a_1 = y'(0) = 0$, d'où $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. S'il y a une solution de l'équation différentielle développable en série entière, cela doit être

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Pour s'assurer que cette fonction est bien une solution on doit vérifier que le rayon de convergence n'est pas nul, sinon $y(x)$ n'est défini que pour $x = 0$. Or on montre facilement par le critère de d'Alembert que cette série a pour rayon $R = +\infty$. La fonction y ainsi obtenue est non nulle, et elle vérifie bien l'équation différentielle, c'est donc une solution.

FIN DU COURS

Annexe A

Inégalités classiques

1 Sur les fonctions usuelles

- Exponentielle.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x.$$

- Logarithme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

- Sinus.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 1 - \frac{x^3}{3} \leq \sin(x) \leq x.$$

- Cosinus.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1.$$

- Tangente et arc tangente.

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad x \leq \tan(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(x) \leq x.$$

- Cosinus et sinus hyperboliques.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \leq \operatorname{sh}(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \frac{x^2}{2} \leq \operatorname{ch}(x).$$

2 Identité remarquable et valeur absolue (module)

- Identité remarquable.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2|x||y| \leq x^2 + y^2.$$

- Racine carrée.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

- Inégalités triangulaires.

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad ||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

- Inégalité de Bernoulli.

$$\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + nx \leq (1+x)^n$$

3 Accroissements finis

Théorème A.1: Inégalités des accroissements finis.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

1. f est continue sur $[a, b]$;
2. f est dérivable sur $]a, b[$;
3. f' est bornée sur $]a, b[: \exists M > 0, \|f'\|_{\infty,]a, b[} \leq M$.

Alors on a :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_{\infty,]a, b[} |x - y|.$$

- Conséquence sur la fonction sinus.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

- Conséquence sur la fonction cosinus.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|.$$

- Conséquence sur les fonctions arc tangentes et tangentes.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y| \quad \text{et} \quad \forall x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad |x - y| \leq |\tan(x) - \tan(y)|.$$

4 Formule de Taylor

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et si $a \in I$, alors la formule on a la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \\ &= S_n(x) + R_n(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous en déduisons une inégalité plus générale (implique l'IAF si $n = 0$) :

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leq \|f^{n+1}\|_{\infty, [a, x]} \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

[Cliquez ici pour une fiche encore plus détaillée!](#)