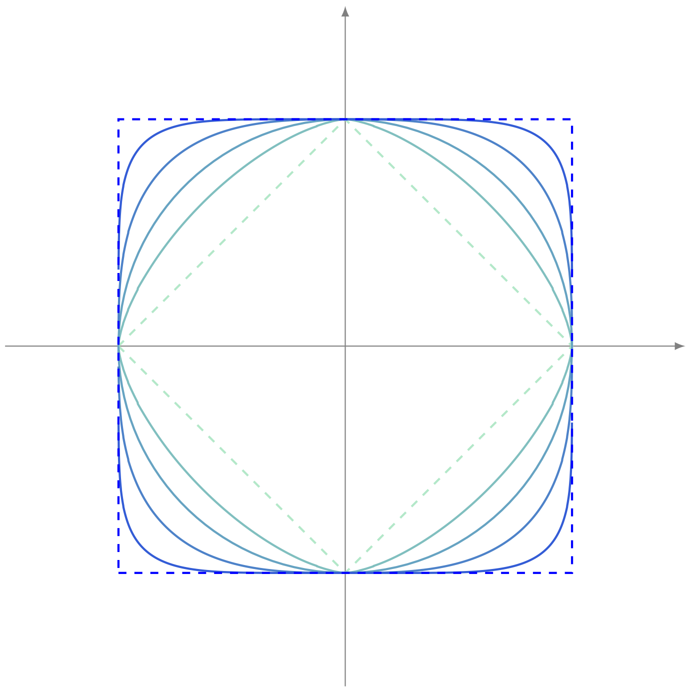
Université Gustave Eiffel

LAMA
LABORATOIRE D'ANALYSE ET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES – UMR 8050

# Licence 3

*Enseignement des Mathématiques*
*Mathématiques-Physique, Chimie*
*Ingénierie Mathématique*

## Espaces Vectoriels Normés



*Rédigé par Colin Petitjean*

## Tentative de programme prévisionnel.

*Mode révision = Version sans prises de notes, avec questionnaire type QCM (question.direct), poly de cours détaillé mis en ligne, et interrogation de cours à la séance suivante.*

*Bonus = À mentionner en cours rapidement si le temps le permet, pour la culture Mathématiques ; Pour les intéressés, un résumé du sujet est présent dans le poly de cours, mais il n'est pas exigible en devoir.*

**Cours** 1 : EVN 1. *(Mode révison) Jeudi 14/09 de 13h30 à 15h30.*

- Def + exemples dans $\mathbb{K}^n$ ;
- Démo de $\|\cdot\|_p$ est une norme (Hölder et Minkowski) ;
- Topologie : Boule/sphère, ouvert/fermé, voisinage/intérieur/adhérence.
- Normes équivalentes et topologie ;

**Cours** 2 : EVN 2. *(Mode révison) Jeudi 28/09 de 8h30 à 10h30.*

- Interro de cours 1.
- Topologie Induite ;
- Suites convergentes / Propriétés / Carac séquentielles fermés / Densité ;
- Continuité / Carac ouvert / Carac séquentielle.

**Cours** 3 : EVN 3. *Jeudi 5/10 de 8h30 à 10h30.*

- Applications linéaires continues ;
- Isomorphismes ;
- Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **(Fin du chapitre 1)**

**Cours** 4 : Compacité 1. *Jeudi 12/10 de 8h30 à 10h30.*

- Interro de cours 2.
- Compacité version BW (via les suites) ;
- Propriétés des compacts (fermé, borné, etc) ;
- Compacité et continuité 1.

**Cours** 5 : Compacité 2. *Jeudi 19/10 de 8h30 à 10h30.*

- Interro de cours 3.
- Compacité et continuité 2.
- Produits d'ensembles compacts ;
- Cas de la dimension finie (carac compacité, équivalence des normes, continuité a.l.) ;

**Cours** 6 : Compacité 3 / Espaces complets 1. *Jeudi 26/10 de 8h30 à 10h30.*

- Bonus : Propriété de Borel-Lebesgue. **(Fin du chapitre 2)**
- Suites de Cauchy ;
- Bonus : Carac précompacité ;
- Espaces complets (Banach) / Cas de la dim finie ;

***Vacances scolaires du 30/10 au 05/11.***

**Cours** 7 : **PARTIEL le 9 novembre de 8h30 à 10h30 – Chapitres 1 et 2.**

**Cours** 8 : Espaces complets 2. *Jeudi 16/11 de 8h30 à 10h30.*

- Ensembles complets.
- Fermés emboîtés ;
- Exemples d'espaces de Banach ;
- Théorème du point fixe de Banach/Picard.

**Cours** 9 : Espaces complets 3 / Connexité 1. *Jeudi 23/11 de 8h30 à 10h30.*

- Interro de cours 4.
- Séries dans un evn / GL($E$) ouvert ;
- Exponentielle d'endomorphismes. **(Fin du chapitre 3)**
- Caractérisations connexité via les ouverts-fermés / via la continuité.

**Cours** 10 : Connexité 2 *Jeudi 30/11 de 8h30 à 10h30.*

- Image continue / Union / Adhérence.
- Connexité par arcs / Relation d'équivalence / Implique Connexe ;
- Caractérisation connexes de $\mathbb{R}$ ;

**Cours** 11 : Connexité 3 *Jeudi 7/12 de 8h30 à 10h30.*

- Interro de cours 5 (sur le chapitre 4).
- Composantes connexes / Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Applications 1 : TVI + Darboux ;
- Application 2 : Espaces non homéomorphes ; **(Fin du chapitre 4)**

**Cours** 12 : Calcul différentiel 1. *Jeudi 14/12 de 8h30 à 10h30.*

- Rappels de calcul différentiel.
- Différentielle (version générale) ;
- Inégalité des accroissements finis

**Cours** 13 : Calcul différentiel 2. *Jeudi 21/12 de 8h30 à 10h30.*

- Application 1 : différentielle nulle $\implies$ constante ;
- Application 2 : Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. **(Fin du chapitre 5)**

***Vacances scolaires du 25/12 au 07/01.***

***Semaine de révisions du lundi 08/01 au dimanche 14/01.***

***Semaine des examens du lundi 15/01 au vendredi 21/01.***

# Table des matières

# Chapitre 1

# Topologie des espaces vectoriels normés

**Motivation :** Pour de nombreux problèmes pratiques de la vie quotidienne, ainsi que pour des problèmes scientifiques fondamentaux, nous avons besoin de calculer des distances entre des objets, ou encore d'étudier précisément les propriétés géométriques de ces derniers. Par exemple, on utilise tous des applications qui servent à nous donner le chemin le plus court (ou le plus rapide) pour se rendre d'un point $A$ à un point $B$. Selon le mode de transport que l'on souhaite utiliser (routes, réseaux ferrés, aériens, etc.), le calcul des distances peut différer car les réseaux ne sont pas les mêmes. Cependant, on peut souvent représenter ces réseaux comme des sous-ensembles d'espaces vectoriels ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ...).

Mais alors, comment calculer la distance entre des points d'un espace vectoriel ?

C'est ici que les normes entrent en jeu. En quelque sorte, une norme est une généralisation de la valeur absolue $|\cdot|$ des nombres réels. On utilise les espaces vectoriels pour modéliser des situations, et les normes pour calculer des distances. Les espaces vectoriels normés fournissent ainsi un cadre formel et rigoureux pouvant s'appliquer à de très nombreux cas, ils sont donc utilisés très souvent pour résoudre des problèmes physiques et mathématiques.

En fait, nous irons rapidement plus loin que simplement calculer ou comparer des distances. Nous généraliserons les concepts de suites convergentes, d'applications continues, d'applications dérivables, etc. Nous étudierons également les propriétés géométriques des espaces normés et de leurs sous-ensembles, d'où le terme *topologie* dans le titre de ce premier chapitre. En effet, l'étymologie du mot « topologie » est éloquente : En Grec, topos signifie lieu tandis que logos signifie étude. Ce domaine des Mathématiques s'intéresse donc à l'étude des lieux, appelés en général espaces, et aux propriétés qui les caractérisent.

Historiquement, ce n'est que vers 1920 que la notion formelle et abstraite d'espace normé est dégagée (bien que des espaces normés particuliers étaient utilisés depuis plus la fin du XIX$^e$siècle). On la doit principalement à S. Banach (1892-1945) qui, dans sa thèse de 1920 intitulée “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, écrit :
« *L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.* »

**Notation :** Dans tout ce cours, $E$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

# 1 Définition - Normes sur $\mathbb{K}^n$

**Définition 1.1: Notion de norme.**

Une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est appelée ***norme*** si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

$(i)$ $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0.$ ***(Séparation)***

$(ii)$ $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$ ***(Homogénéité positive)***

$(iii)$ $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y).$ ***(Inégalité triangulaire)***

On dit alors que $E$ est un espace vectoriel normé.

**Notation :** Très souvent, nous noterons $\|x\|$ à la place de $N(x)$. De plus, lorsque l'on souhaite préciser la norme considérée sur un espace $E$, on écrira souvent : " Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé".

**Remarque :**

- Pour tout $x, y$ dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\|.$$

  L'assertion ci-dessus généralise "*l'inégalité triangulaire renversée*" que vous utilisez parfois avec la valeur absolue, sa démonstration est identique et est laissé en exercice.

- L'homogénéité positive implique en particulier que $\|x\| = \|-x\|$ et $\|x - y\| = \|y - x\|$.

**Définition 1.2: Distance associée à une norme.**

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors ***la distance associé à*** $\|\cdot\|$ est l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ donnée par

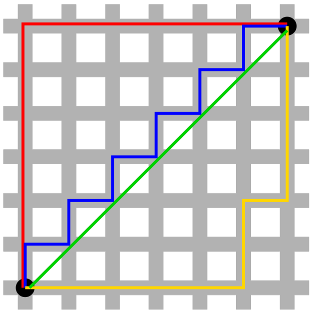
$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

**Exemples :** Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit

- ***La norme 1 :*** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
- ***La norme 2 :*** $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- ***La norme infinie :*** $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

**Remarque :** La norme 1 est parfois aussi appelée "*distance de Manhattan*" ou encore "*taxi-distance*". En effet, elle peut être utilisée pour calculer la distance entre deux points parcourue par un taxi lorsqu'il se déplace dans une ville où les rues sont agencées selon un réseau ou quadrillage. La norme 2 est appelée *norme euclidienne*. Il s'agit de la norme que vous utilisez depuis le collège pour calculer la distance entre deux points dans le plan ou dans l'espace ; On parle aussi de "*distance à vol d'oiseau*" dans le langage courant.

Ci-contre, les chemins rouge, jaune et bleu sont tous des chemins qui permettent de relier les points aux extrémités de manière optimale pour la norme 1 (i.e. en minimisant la “longueur du trajet”). Le chemin vert en diagonal représente l'unique chemin que doit emprunter un marcheur s'il veut optimiser son parcours pour la norme 2.



- De manière plus générale, nous pouvons aussi définir ***la norme p*** pour $p \in [1, +\infty[$ comme suit :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notre premier objectif est de démontrer rigoureusement que les applications définies ci-dessus sont effectivement des normes sur $\mathbb{K}^n$. Les axiomes de séparation et d'homogénéité positive sont assez faciles à démontrer, nous les laissons en exercice.

**Exercice :** Démontrer que, pour tout $p \in [1, +\infty]$, la norme $p$ vérifie les axiomes de séparation et d'homogénéité positive de la définition d'une norme.

La partie difficile réside dans la démonstration de l'inégalité triangulaire. Nous aurons alors besoin des résultats ci-dessous.

**Lemme 1.3: Inégalité de Young.**

Soient $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $a, b$ sont deux réels positifs alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Démonstration.* Si $a$ ou $b$ est nul, alors cette l'inégalité est clairement vérifiée. On suppose donc que $a > 0$ et $b > 0$. On a alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q).$$

Puis, comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et la fonction logarithme est concave, de l'égalité ci-dessus nous obtenons

$$\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right).$$

On conclut en passant à l'exponentielle dans l'inégalité précédente. □

**Proposition 1.4: Inégalité de Hölder.** ♥

Soient $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Démonstration.* Si $\|x\|_p = 0$, alors $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et ainsi l'inégalité est clairement vraie. De même si $\|y\|_q = 0$, on peut donc supposer que $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$.

*Étape 1 :* Supposons que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
D'après l'inégalité de Young, nous avons alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ :

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}.$$

En sommant ces inégalités de 1 jusqu'à $n$ nous obtenons

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n |y_i|^q.$$

Or, nous avons supposé que $\|x\|_p = 1$ et donc $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1$. De même $\|y\|_q^q = \sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1$. On reporte ces valeurs dans l'inégalité ci-dessus :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q,$$

ce qui termine la première étape.

*Étape 2 :* Dans le cas général, on suppose toujours que $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$ et on pose $x' = \frac{x}{\|x\|_p}, y' = \frac{y}{\|y\|_q} \in \mathbb{K}^n$. Par homogénéité des normes p et q, nous avons $\|x'\|_p = 1$ et $\|y'\|_q = 1$, ainsi nous pouvons appliquer la première étape à $x'$ et $y'$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_p} \leq 1 \iff \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Remarques :**

1. Lorsque $p$ et $q$ vérifie la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on dit que $q$ *est l'exposant conjugué de* $p$ et réciproquement. Si $p = 1$, son exposant conjugué est alors $+\infty$.

2. L'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \|y\|_2,$$

   permet de retrouver une autre inégalité bien connue : *L'Inégalité de Cauchy-Schwarz.* Elle peut être démontré directement en utilisant le fait que la norme 2 provient d'*un produit scalaire.*

3. L'inégalité de Hölder reste valable dans le cas $p = 1$ et $q = +\infty$ dans le sens suivant :

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right) \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} = \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

**Proposition 1.5: Inégalité de Minkowski.**

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$, alors

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Ainsi l'application $\|\cdot\|_p : x \in \mathbb{K}^n \mapsto \|x\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Comme nous l'avons mentionné un peu plus tôt, les axiomes de séparation et d'homogénéité pour montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sont faciles à prouver. Leur démonstration est donc laissée en exercice. Nous allons simplement traiter ci-dessous le cas de l'inégalité triangulaire.

*Démonstration.* Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ découlent simplement de l'inégalité triangulaire pour $|\cdot|$, ils sont laissés aussi en exercice.
On suppose donc que $1 < p < +\infty$, et on note $q$ son exposant conjugué. Remarquez que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \iff p = (p-1)q.$$

Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. On peut supposer que $\|x+y\|_p \neq 0$ car sinon l'inégalité est clairement vérifiée. Grâce à l'inégalité triangulaire pour $|\cdot|$, on a :

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1}.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder sur chacune des deux sommes pour obtenir

$$\sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|x+y\|_p^{p/q}$$

et

$$\sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \|y\|_p \|x+y\|_p^{p/q}.$$

Ainsi

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\| + \|y\|)\|x+y\|_p^{p/q}.$$

Or nous avons également que $p/q = p - 1$. Ainsi on obtient l'inégalité souhaitée en divisant par $\|x+y\|_p^{p/q}$ de chaque côté de l'inégalité précédente. □

Nous terminons cette partie avec la définition ci-dessous.

**Définition 1.6: Normes équivalentes.**

Soit $E$ un espace vectoriel et soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$. On dit alors que $N_1$ et $N_2$ sont ***équivalentes*** si il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in E, \quad c_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2 N_1(x).$$

**Exemples :** : Sur $\mathbb{R}^2$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies ci-dessus sont deux à deux équivalentes. En effet, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ :

- $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq 2\|\cdot\|_\infty$,

- $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_\infty$,
- $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_2$.

Nous laissons la vérification en T.D.

En fait, nous montrerons un peu plus tard que toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes. En revanche, trouver les constantes d'équivalences optimales entre deux normes données peut s'avérer difficile, c'est un sujet de recherche très actif ("*Analyse en grande dimension*").

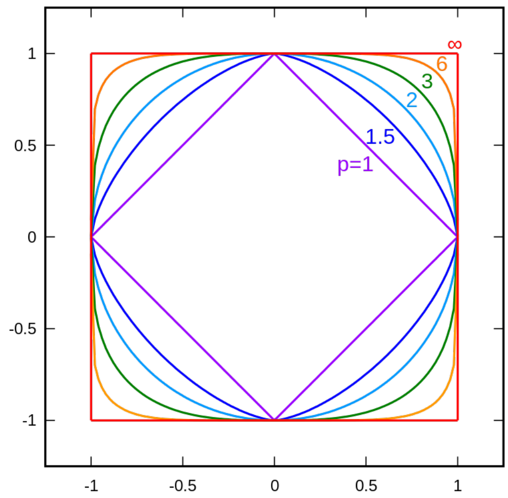
## 2 Quelques éléments de topologie

Dans toute cette section, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

**Définition 1.7: Boule ouverte - Boule fermée - Sphère.**

- On appelle ***boule ouverte*** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble
$$\mathrm{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}.$$
- On appelle ***boule fermée*** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble
$$\overline{\mathrm{B}}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}.$$
- On appelle ***sphère*** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble
$$\mathrm{S}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

**Remarque :** Dans le cas où $a = 0_E$ et $r = 1$ on parle de boule unité ouverte pour $\mathrm{B}(0, 1)$, boule unité fermé pour $\overline{\mathrm{B}}(0, 1)$ et de sphère unité pour $\mathrm{S}(0, 1)$. Le dessin ci-dessous représente la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$, pour différentes valeurs de $p$.




**Définition 1.8: Ensemble borné.**

On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est ***borné*** si il existe $M > 0$ tel que :
$$\forall x \in A, \|x\| \leq M.$$

De manière équivalente, un ensemble $A$ est borné dans $E$ si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0, M)$.

**Définition 1.9: Ouvert - Fermé.**

- Une partie $A$ de $E$ est dite ***ouverte*** si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, r) \subset A$. On dit aussi que ***$A$ est un ouvert de $E$***.
- Une partie $A$ de $E$ est dite ***fermée*** si son complémentaire $A^c = E \setminus A$ est un ouvert. On dit aussi que ***$A$ est un fermé de $E$***.

**Exemples :** Bien sûr, les boules ouvertes sont des ouverts, et les boules fermés ainsi que les sphères sont des fermés de $E$ (cf T.D.). De plus, $E$ et $\emptyset$ sont à la fois des ouverts et des fermés. A votre avis, que dire de $\{x\}$ est de $E \setminus \{x\}$ pour un certain $x \in E$ ?

Dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $|\cdot|$, les intervalles du type $]a, b[$ $(a < b)$ sont des ouverts et les intervalles du type $[a, b]$ sont des fermés. A votre avis, que dire des intervalles suivants : $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$ ?

⚠ Il existe des ensembles qui ne sont ni des ouverts, ni des fermés !
Par exemple, dans l'espace normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'ensemble $[0, 1[$ n'est pas un ouvert : toutes les boules centrées en 0 intersectent le complémentaire. De plus $[0, 1[$ n'est pas un fermé puisque son complémentaire $]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$ n'est pas un ouvert : toutes les boules centrées en 1 intersectent $[0, 1[$.

**Proposition 1.10: Unions et intersections d'ouverts/fermés.** ♥

1. Toute union d'ouverts est un ouvert.
2. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection fermés est un fermé.
4. Toute union finie de fermés est un fermé.

*Démonstration.* Nous allons démontrer uniquement les deux premiers points, les deux suivants s'obtiennent par passage au complémentaire. Montrons la première assertion : Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $E$, et soit $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$. Alors il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Puisque $O_i$ est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset O_i$. Ainsi $\mathrm{B}(x, r) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ et donc $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert de $E$.
Montrons maintenant la deuxième assertion. Soit $(O_i)_{i=1}^n$ une famille finie d'ouverts de $E$. Si $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $r_i > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r_i) \subset O_i$. On pose alors $r := \min\{r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. On a alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{B}(x, r_i) \subset O_i$. Ceci implique que $\mathrm{B}(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i$, et donc $\bigcap_{i=1}^n O_i$ est un ouvert. □

**Remarque :** ⚠ Une union infinie de fermés peut être ni ouvert, ni fermé. De même pour une intersection infinie d'ouverts. Par exemple dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, on considère les ensembles ouverts $O_n = ]-\frac{1}{n}, 1[$ et les fermés $F_n = [-1, 1 - \frac{1}{n}]$. Alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n = [0, 1[ \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = [-1, 1[ \text{ (ensembles ni ouvert, ni fermé).}$$

Nous allons terminer cette partie avec les notions ci-dessous.

**Définition 1.11: Voisinage, Intérieur et Adhérence.**

Soient $A$ une partie de $E$ et $x$ un point de $E$.

- On dit que $A$ est un ***voisinage*** de $x$ s'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset A$.
- On dit que $x$ est ***intérieur*** à $A$ si il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset A$.
  L'ensemble des points intérieurs à A est appelé ***l'intérieur de*** $A$ et est noté $\mathring{A}$.
- On dit que $x$ est dans ***l'adhérence*** de $A$ si toute boule ouverte $\mathrm{B}(x, r)$ avec $r > 0$ contient au moins un point de $A$, i.e. $\forall r > 0$, $\mathrm{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
  L'ensemble des points adhérents à A est appelé ***l'adhérence de*** $A$ et est noté $\overline{A}$.

**Remarque :** D'après la définition d'intérieur, on peut reformuler la définition d'ouvert comme suit : $A \subset E$ est ouvert si et seulement si $A$ est un voisinage de chacun de ses points.

Les propriétés suivantes caractérisent l'intérieur et l'adhérence de A, nous laissons les démonstrations en exercices (cf. T.D.).

**Proposition 1.12**

Soit $A$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé $E$.

$(i)$ $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans $A$.

$(ii)$ $\mathring{A}$ est égal à l'union des ouverts inclus dans $A$.
C'est ainsi le plus grand ouvert inclus dans $A$.

$(iii)$ $A$ est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

**Proposition 1.13**

Soit $A$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé $E$.

$(i)$ $\overline{A}$ est un fermé qui contient $A$.

$(ii)$ $\overline{A}$ est égal à l'intersection des fermés contenant $A$.
C'est ainsi le plus petit fermé contenant $A$.

$(iii)$ $A$ est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

## 3 Autour du terme "topologie"

**Définition 1.14**

***La topologie*** d'un espace vectoriel normé $E$ désigne l'ensemble des parties ouvertes de $E$.

*Pour aller plus loin :* Il s'agit en fait d'une notion plus générale qui s'applique à un grand nombre d'ensembles différents, et donc pas simplement aux espaces normés. *Un espace topologique* est un couple $(E, T)$, où $E$ est un ensemble et $T$ une topologie sur $E$, à savoir une famille de parties de $E$ – que l'on appelle les ouverts de $(E, T)$ – vérifiant les propriétés suivantes : l'ensemble vide et $E$ appartiennent à $T$ ; toute union d'ouverts est un ouvert ; toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. Les espaces topologiques forment le socle minimal permettant de définir les notions de limites, continuité, voisinage, etc.

**Théorème 1.15**

Soient $N_1$ et $N_2$ des normes sur un espace vectoriel $E$. Alors $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes si et seulement si elles donnent la même topologie sur $E$.

Évidemment, par passage au complémentaire, le théorème précédent implique que deux normes sont équivalentes si et seulement si les fermés pour ces deux normes coïncident.

*Démonstration.* Soit $O$ une partie de $E$. On souhaite démontrer que

$$O \text{ est un ouvert de } (E, N_1) \iff O \text{ est un ouvert de } (E, N_2).$$

Puisque $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes, il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad c_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2 N_1(x).$$

Supposons que $O$ soit un ouvert de $(E, N_1)$. Soit $x \in O$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B_{N_1}(x, r) \subset O$. On pose $r' = c_1 r$. Un calcul direct montre que

$$y \in B_{N_2}(x, r') \iff N_2(x-y) \leq r' \implies c_1 N_1(x-y) \leq r' \iff N_1(x-y) \leq r \iff y \in B_{N_1}(x, r).$$

Par conséquent, $B_{N_2}(x, r') \subset B_{N_1}(x, r) \subset O$, ce qui démontre bien que $O$ est un ouvert pour $(E, N_2)$. Par symétrie des rôles, si $O$ soit un ouvert de $(E, N_2)$ alors c'est aussi un ouvert de $(E, N_1)$.

Passons à la réciproque. Supposons $N_1$ et $N_2$ donnent la même topologie sur $E$. Alors la boule ouverte $B_{N_1}(0, 1)$ est donc un ouvert pour $N_2$. Donc il existe $c_1 > 0$ tel que $B_{N_2}(0, c_1) \subset B_{N_1}(0, 1)$. Ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned}\Big[\forall x \in E,\ x \in B_{N_2}(0, c_1) \implies x \in B_{N_1}(0, 1)\Big] &\iff \Big[\forall x \in E,\ N_2(x) \leq c_1 \implies N_1(x) \leq 1\Big] \\ &\iff \Big[\forall x \in E,\ c_1 N_1(x) \leq N_2(x)\Big].\end{aligned}$$

De même, la boule ouverte $B_{N_2}(0, 1)$ est un ouvert pour $N_1$, donc il existe $r > 0$ tel que $B_{N_1}(0, r) \subset B_{N_2}(0, 1)$. Ceci implique que $r N_2(x) \leq N_1(x)$ pour tout $x \in E$, autrement dit : $N_2(x) \leq c_2 N_1(x)$ avec $c_2 = \frac{1}{r} > 0$. □

**Définition 1.16: Topologie induite.**

Si $A$ est une partie d'un espace vectoriel normé $E$, alors ***la topologie induite sur $A$*** est l'ensemble des ouverts de $E$ intersectés avec $A$, c'est-à-dire

$$\{O \cap A \mid O \text{ ouvert de } E\}.$$

On dit alors que ***$O$ est un ouvert de $A$*** si il existe un ouvert $O'$ de $E$ tel que $O = O' \cap A$. De même, ***$F$ est un fermé de $A$*** si il existe un fermé $F'$ de $E$ tel que $F = F' \cap A$.

Pour des raisons pratiques, nous introduisons les notations

$$\mathrm{B}_A(a, r) := \{x \in A \mid \|x - a\| < r\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{B}_A}(a, r) := \{x \in A \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

Il s'agit de la boule ouverte dans $A$ de centre $a$ et de rayon $r \geq 0$ et de la boule fermée dans $A$ de centre $a$ et de rayon $r \geq 0$. Remarquez alors que

$$U \text{ est un ouvert de } A \iff \forall a \in U,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}_A(a,r) \subset U.$$

$$F \text{ est un fermé de } A \iff A \setminus F \text{ est un ouvert de } A.$$

**Remarques :**

- On dit souvent qu'un ouvert de $A$ est la trace sur $A$ d'un ouvert de $E$.
- Si $O$ est un ouvert de $E$ avec $O \subset A$, alors $O$ est un ouvert de $A$ (de même, tout fermé de $E$ inclus dans $A$ est fermé dans $A$).
- ⚠ Un ouvert de $A$ pour la topologie induite n'est pas forcément ouvert de $E$ (de même pour les fermés). Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ est muni de $|\cdot|$ et si $A = ]-1,1]$, alors $]0,1] = ]0,2[ \cap A$ est ouvert de $A$ mais pour autant $]0,1]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
- En revanche, si $A$ est un ouvert de $E$, alors tout ouvert de $A$ est un ouvert de $E$.

**Exemple :** Soit $E = \mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$ et soit $A = \{0,1\}$. Alors, tous les sous-ensembles de $A$ sont des ouverts de $A$. En effet $\emptyset = \emptyset \cap A$, $\{0\} = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \cap A$, $\{1\} = ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[ \cap A$ et enfin $\{0,1\} = ]-1,2[ \cap A$. Lorsque cela est vérifié, on dit que la topologie induite sur $A$ est ***discrète***, et que *$A$ est un sous-ensemble discret de $E$*.

## 4 Suites dans les espaces vectoriels normés

Soit $E$ un espace vectoriel normé. Une suite dans $E$ est une application $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in E$. On notera souvent les suites sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, comme dans le cas des suites réelles. Il faut simplement se rappeler que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E$.

**Définition 1.17: Suite convergente.**

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ ***converge*** vers une limite $\ell \in E$ si la suite réelle $(\|\ell - u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq n_0 \implies \|\ell - u_n\| \leq \varepsilon].$$

On note alors sans surprise : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**Remarque :** De manière équivalente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge vers $\ell \in E$ si pour tout voisinage $U$ de $\ell$ (ou encore toute boule $\mathrm{B}(\ell,\varepsilon)$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ : $u_n \in U$.

**Proposition 1.18: Unicité de la limite.**

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ est convergente, alors sa limite est unique.

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ possède deux limites $\ell \in E$ et $\ell' \in E$. On alors :

$$(\star) \quad 0 \leq \|\ell - \ell'\| = \|\ell - u_n + u_n - \ell'\| \leq \|\ell - u_n\| + \|\ell' - u_n\|.$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ell - u_n\| = 0$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ell' - u_n\| = 0$. Ainsi, en passant à la limite dans ($\star$), on obtient

$$0 \leq \|\ell - \ell'\| \leq 0,$$

c'est-à-dire $\|\ell - \ell'\| = 0$ et ainsi $\ell = \ell'$ car $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$. $\square$

**Exercice :** Donner une caractérisation de "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$)" en terme des coordonnées des termes $u_n$.

**Définition 1.19: Suite bornée.**

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ est ***bornée*** si

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M.$$

En d'autres termes, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

**Proposition 1.20: Convergente implique bornée.**

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ est convergente, alors elle est bornée.

*Démonstration.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ convergeant vers un élément $\ell \in E$. D'après la définition de convergence avec $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - \ell\| \leq 1$. D'après l'inégalité triangulaire renversée nous en déduisons que

$$\forall n \geq n_0, \quad \|u_n\| \leq 1 + \|\ell\|.$$

Posons alors $m = \max\{\|u_0\|, \ldots, \|u_{n_0-1}\|\}$ puis $M = \max\{m, 1 + \|\ell\|\}$. Il est facile de vérifier que ce choix de $M$ convient : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$. $\square$

La proposition ci-dessous est classique, nous laissons sa démonstration en exercice.

**Proposition 1.21: Opérations sur les limites.**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ deux suites convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2. La suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. La suite $(\|\lambda u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\lambda u_n\| = |\lambda| \, \|\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\|$.

⚠ Comme il est souvent possible de définir plusieurs normes sur un même espace vectoriel $E$, la notion de convergence est étroitement liée au choix de la norme sur cet espace. Il peut donc y avoir des suites qui sont convergentes pour une certaine norme mais pas pour une autre. En revanche, deux "*normes equivalentes*" ont toujours les mêmes suites convergentes :

**Proposition 1.22**

Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un espace vectoriel $E$. Alors $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour $N_1$ est aussi convergente pour $N_2$ (vers la même limite), et vice-versa.

*Démonstration.* " $\Longrightarrow$ " Supposons que $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes. Il existe donc deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que

$$(\star) \quad \forall x \in E, \quad c_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2 N_1(x).$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $E$. Nous devons montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $N_1$ si et seulement si elle converge pour $N_2$. Si la suite converge pour $N_1$ alors il existe $\ell \in E$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(\ell - u_n) = 0$. D'après $(\star)$ nous avons

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} N_2(\ell - u_n) \leq \lim_{n\to+\infty} c_2 N_1(\ell - u_n) = 0,$$

et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ pour $N_2$ également. La démonstration de "convergence pour $N_2$ implique convergence pour $N_1$" étant très similaire, elle est laissée en exercice.
" $\Longleftarrow$ " Raisonnons par contraposée et supposons donc que $N_1$ et $N_2$ ne soient pas équivalentes. Cela signifie que, pour toute constantes fixées $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, au moins une des deux inégalités dans l'assertion $(\star)$ ne peut être vérifiée. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $c_1 = \frac{1}{n}$ et $c_2 = n$ dans $(\star)$ et au moins une des deux inégalités n'est pas satisfaite. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il s'agit toujours de la même inégalité qui est cassée, disons la deuxième :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E \setminus \{0\}, \quad N_2(x) > n N_1(x).$$

Posons $u_n = \frac{x_n}{\sqrt{n} N_1(x_n)}$. Par homogénéité de la norme, remarquez que

$$N_1(u_n) = \frac{N_1(x_n)}{\sqrt{n} N_1(x_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour $N_1$. En revanche, on observe aisément que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas pour la norme $N_2$ puisque qu'elle n'est même pas bornée :

$$N_2(u_n) = \frac{N_2(x_n)}{\sqrt{n} N_1(x_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On invite le lecteur ou la lectrice à reproduire l'argument dans le cas où la première inégalité dans $(\star)$ n'est pas vérifiée : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E \setminus \{0\}, \quad N_1(x_n) > \frac{1}{n} N_2(x_n)$. □

La théorème suivant peut être paraphrasé de la manière suivante : la topologie d'un espace normé est caractérisée par la convergence des suites.

**Théorème 1.23: Caractérisation séquentielle des fermés.** ♥

Dans un espace vectoriel normé $E$, une partie $A \subset E$ est fermée si et seulement si :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \implies \ell \in A.$$

*Démonstration.* Nous allons démontrer chacune de deux implications par la contraposée.

Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergeant vers $\ell \notin A$. On souhaite alors démontrer que $A$ n'est pas un fermé de $E$, i.e. $A^c$ n'est pas un ouvert de $E$. En effet, en utilisant la définition de convergence, pour tout $r > 0$ il existe un certain $u_n \in \mathrm{B}(\ell, r)$. Or $u_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a $\ell \in A^c$ mais pour autant chaque boule $\mathrm{B}(\ell, r)$ intersecte $A$, et donc

$$\forall r > 0, \quad \mathrm{B}(\ell, r) \not\subset A^c,$$

ce qui montre que $A^c$ n'est pas un ouvert de $E$.

Réciproquement, on suppose que $A$ n'est pas un fermé (i.e. $A^c$ n'est pas un ouvert), et on souhaite démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers une limite $\ell \in A^c$. Comme $A^c$ n'est pas un ouvert, on a

$$\exists x \in A^c, \forall r > 0, \quad \mathrm{B}(x, r) \not\subset A^c.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n})$ tel que $x_n \notin A^c$ (i.e. $x_n \in A$). La condition $x_n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n})$ s'écrit aussi $\|x_n - x\| \leq \frac{1}{n}$ et implique donc que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, nous avons bien construit la suite recherchée. □

**Corollaire 1.24: Caractérisation séquentielle de l'adhérence.**

Soient $E$ un espace vectoriel normé et $A$ une partie de $E$. Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ qui converge vers $x$.

*Démonstration.* " $\Longrightarrow$ " Si $x$ est dans l'adhérence de $A$, alors $\forall r > 0$, $\mathrm{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset$. On peut alors réaliser la même construction que dans la précédente démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n}) \cap A$ tel que $x_n \in A$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ converge alors vers $x$.

" $\Longleftarrow$ " Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ qui converge vers $x$. Puisque $A \subset \overline{A}$ et $\overline{A}$ est un fermé, on obtient alors $x \in \overline{A}$ d'après le théorème précédent. □

Nous terminons cette partie autour de la notion de densité que vous avez déjà rencontrée en L1.

**Définition 1.25: Densité.**

Dans un espace vectoriel normé $E$ on considère un sous-ensemble fermé $A$ et une partie $D \subset A$. On dit que $D$ est ***dense*** dans $A$ si et seulement si $\overline{D} = A$.
Autrement dit, $D$ est dense dans $A$ si pour tout point $x \in A$, il existe une suite d'éléments de $D$ qui converge vers $x$.

**Exemples :** L'ensembles $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. Pour la démonstration, on utilise le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien. Si vous souhaitez vous rafraîchir la mémoire, je vous conseille de regarder cette courte vidéo, les démonstrations des densités de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y sont détaillées (à noter que la définition de densité diffère légèrement, mais elle en fait équivalente, voir cette vidéo pour le détail).

# 5 Continuité

Dans toute cette partie, $E$ et $F$ désigneront des espaces vectoriels normés et $A$ un ouvert de $E$. On muni donc $A$ de la topologie induite par $E$.

**Définition 1.26: Limite d'une fonction en un point.**

Soient $f : A \to F$ une fonction et $x_0 \in A$. On dit que ***$f$ admet une limite en $x_0$*** si il existe $\ell \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - x_0\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors sans surprise $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Vous avez déjà étudié cette définition l'année dernière pour $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, en cours de "Fonctions de plusieurs variables". Nous allons donc simplement rappeler deux propriétés importantes, sans les démontrer.

- *Si $f$ admet une limite en $x_0$, alors cette limite est unique.*
- *Linéarité de la limite :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \implies \lim_{x \to x_0} (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 \lim_{x \to x_0} f(x) + \lambda_2 \lim_{x \to x_0} g(x).$$

- *Caractérisation séquentielle : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ qui converge vers $x_0$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.*

⚠ Il faut cependant être capable de fournir les démonstrations de ces résultats.

**Définition 1.27: Continuité.**

Soient $f : A \to F$ une fonction et $x_0 \in A$. On dit que ***$f$ est continue en $x_0$*** si $f$ admet une limite en $x_0$ et si cette limite vaut $f(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - x_0\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$

Si $f$ est continue en tout point d'un ensemble $A \subset E$, on dit que ***$f$ est continue sur $A$.***

**Remarques :**

- On peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes dans cette définition.
- De manière équivalente,

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } x_0 &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad x \in \overline{\mathrm{B}}_A(x_0, \delta) \implies f(x) \in \overline{\mathrm{B}}(f(x_0), \varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad f(\overline{\mathrm{B}}_A(x_0, \delta)) \subset \overline{\mathrm{B}}(f(x_0), \varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad f(\mathrm{B}_A(x_0, \delta)) \subset \mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon). \end{aligned}$$

**Proposition 1.28:** ♥

Si $f : A \to F$ est une fonction, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $f$ est continue sur $A$ ;

$(ii)$ L'image réciproque de tout ouvert de $F$ est un ouvert de $A$ ;

$(iii)$ L'image réciproque de tout fermé de $F$ est un fermé de $A$ ;

*Démonstration.* "$(i) \implies (ii)$" : Soit $O_F$ un ouvert de $F$. On souhaite montrer que $f^{-1}(O_F)$ est un ouvert de $A$. Soit $x_0 \in f^{-1}(O_F)$. Par définition, $f(x_0) \in O_F$. Comme $O_F$ est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon) \subset O_F$. Par continuité de $f$ en $x_0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(\mathrm{B}_A(x_0, \delta)) \subset \mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon) \subset O_F.$$

Or pour tout sous-ensembles $A_1 \subset E$ et $B_1, B_2 \subset F$, on a $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$ et $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Ces faits généraux appliqués aux inclusions ci-dessus donnent :

$$\mathrm{B}_A(x_0, \delta) \subset f^{-1}\big(f(\mathrm{B}_A(x_0, \delta))\big) \subset f^{-1}(O_F).$$

Ceci démontre bien que $f^{-1}(O_F)$ est un ouvert de $A$.

"$(ii) \implies (i)$" : Montrons la continuité de $f$ en un élément $x_0 \in A$ quelconque. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon)$ est un ouvert de $F$, son image réciproque est un ouvert de $A$. Comme $x_0 \in f^{-1}(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon))$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}_A(x_0, \delta) \subset f^{-1}(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon))$. Or, si $B \subset F$ alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ; et si $A_1 \subset A_2 \subset E$ alors $f(A_1) \subset f(A_2)$. On déduit alors de ces faits généraux

$$f(\mathrm{B}_A(x_0, \delta)) \subset f\Big(f^{-1}\big(\mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon)\big)\Big) \subset \mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon),$$

ce qu'il fallait démontrer.

"$(ii) \iff (iii)$" s'obtient par passage au complémentaire. Détaillons l'implication "$(ii) \implies (iii)$". Si $B$ est un fermé de $F$ alors

$$A \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(F \setminus B).$$

Or $F \setminus B$ est un ouvert de $F$, donc $f^{-1}(F \setminus B)$ est un ouvert de $A$ par hypothèse. Ceci implique que $A \setminus f^{-1}(B)$ est un ouvert de $A$ et donc que $f^{-1}(B)$ est un fermé de $A$. La démonstration de $(iii) \implies (ii)$ est très similaire, elle donc laissée en exercice. □

Rappelons ensuite quelques opérations sur les fonctions continues (sans démonstration) :

- *La somme et le produit (lorsqu'il a du sens) de fonctions continues sont des fonctions continues.*
- *Le quotient (lorsqu'il a du sens) d'une fonction continue par une fonction continue ne s'annulant pas est une fonction continue.*
- *La composition (lorsqu'elle a du sens) de fonctions continues est une fonction continue.*

Puisque nous allons utiliser la propriété suivante à diverses reprises, nous préférons l'énoncer dans un environnement séparé. Il s'agit d'une conséquence directe de la caractérisation séquentielle de la limite de $f$ en $x_0$ avec $\ell = f(x_0)$.

**Théorème 1.29: Caractérisation séquentielle de la continuité.**

Soient $f : A \to F$ une fonction et $x_0 \in A$. Alors $f$ est continue en $x_0$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ qui converge vers $x_0$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Enfin, nous terminons avec la définition d'une application lipschitzienne et son lien avec la continuité.

**Définition 1.30: Applications lipschitziennes.**

Soit $k \geq 0$ et soit $f : A \to F$ une fonction. On dit que $f$ est ***$k$-lipschitzienne*** sur $A$ si

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

On dit que $f$ est ***lipschitzienne*** si elle est $k$-lipschitzienne pour un certain $k \geq 0$, et on dit qu'elle est ***contractante*** si elle $k$-lipschitzienne pour un certain $k < 1$.

**Exercice :** Si $f$ est lipschitzienne sur $A$, alors elle est continue sur $A$.

**Exemple :** La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. En effet,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

# 6 Applications linéaires continues.

**Définition 1.31: Application linéaire.**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

**Théorème 1.32: Caractérisation des applications linéaires continues.** ♥

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $u$ est continue sur $E$ ;

$(ii)$ $u$ est continue en $0$ ;

$(iii)$ Il existe $c_1 \geq 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq c_1\|x\|_E$ ;

$(iv)$ $u$ est bornée sur $\overline{\mathrm{B}}(0,1)$, i.e. $\exists c_2 > 0$, $\forall x \in \overline{\mathrm{B}}(0,1)$, $\|u(x)\|_F \leq c_2$ ;

$(v)$ $u$ est bornée sur $\mathrm{S}(0,1)$, i.e. $\exists c_3 > 0$, $\forall x \in \mathrm{S}(0,1)$, $\|u(x)\|_F \leq c_3$.

*Démonstration du Théorème 1.32.* L'implication $(i) \implies (ii)$ est évidente.

Démontrons l'implication $(ii) \implies (iii)$. D'après la définition de la continuité en $0$ (avec $\varepsilon = 1$), il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x\|_E \leq \eta$ alors $\|u(x)\|_F \leq 1$. Soit alors $x \in E$ quelconque. Supposons que $x \neq 0$. On pose alors $x' := \frac{\eta}{\|x\|_E} x$. On a alors par homogénéité de la norme :

$$\|x'\|_E = \frac{\eta}{\|x\|_E}\|x\|_E = \eta.$$

Par conséquent nous avons

$$\|u(x')\|_F \leq 1 \implies \left\|u\left(\frac{\eta}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F \leq 1 \implies \left\|\frac{\eta}{\|x\|_E}u(x)\right\|_F \leq 1 \implies \frac{\eta}{\|x\|_E}\|u(x)\|_F \leq 1$$
$$\implies \|u(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E.$$

Cette dernière inégalité est clairement vérifiée pour $x = 0$. Ainsi nous avons bien $(iii)$ avec $c_1 = \frac{1}{\eta}$.

L'implication $(iii) \implies (iv)$ est relativement évidente puisque si $x \in \overline{\mathrm{B}}(0,1)$, alors $\|u(x)\| \leq c_1\|x\|_E \leq c_1$. Ainsi $u$ est bornée sur $\overline{\mathrm{B}}(0,1)$ *(par la constante $c_1$ provenant de $(iii)$)*, et donc il suffit de poser $c_2 = c_1$.

L'implication $(iv) \implies (v)$ est triviale puisque $\mathrm{S}(0,1) \subset \overline{\mathrm{B}}(0,1)$ *(et donc l'ensemble $u(\mathrm{S}(0,1))$ est borné par la constante $c_2$ provenant de $(iv)$)*. Par conséquent il suffit de poser $c_3 = c_2$.

Enfin, montrons l'implication $(v) \implies (i)$. Puisque $u$ est bornée sur $\mathrm{S}(0,1)$, il existe $c_3 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{S}(0,1), \quad \|u(x)\|_F \leq c_3.$$

Par linéarité de $u$ est homogénéité de la norme on obtient aisément

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq c_3\|x\|_E,$$

(c'est-à-dire l'assertion $(iii)$ avec $c_1 = c_3$). En remplaçant $x$ par $x - y$ on obtient :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\| \leq c_3\|x-y\|_E.$$

Ceci implique que $u$ est $c_3$-lipschitzienne et donc en particulier que $u$ est continue sur $E$. □

**Remarque :** D'après le raisonnement de la démonstration ci-dessus, les meilleures constantes $c$ (i.e. les plus petites) apparaissant dans les assertions $(iii)$, $(iv)$ et $(v)$ sont en fait toutes égales. Autrement dit, si $u$ est continue alors

$$\underbrace{\sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}}_{\text{Meilleure } c_1} = \underbrace{\sup_{\|x\|_E\leq 1}\|u(x)\|_F}_{\text{Meilleure } c_2} = \underbrace{\sup_{\|x\|_E=1}\|u(x)\|_F}_{\text{Meilleure } c_3}.$$

En effet, si on note

$$s_1 := \sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}, \quad s_2 := \sup_{\|x\|_E\leq 1}\|u(x)\|_F, \quad s_3 := \sup_{\|x\|_E=1}\|u(x)\|_F,$$

alors la démonstration de $(iii) \implies (iv)$ montre que $s_2 \leq s_1$. Puis la démonstration de $(iv) \implies (v)$ montre que $s_3 \leq s_2$. Enfin la démonstration de $(v) \implies (iii)$ montre que $s_1 \leq s_3$. Ceci implique bien que $s_1 = s_2 = s_3$. □

**Définition 1.33: Espace des applications linéaires continues.**

On note $\mathrm{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$. Il s'agit d'un espace vectoriel normé lorsqu'il est muni de la norme d'opérateur (ou norme subordonnée) ci-dessous :

$$\forall u \in \mathrm{L}(E,F), \quad |||u||| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F.$$

Lorsque $E = F$, on notera plus simplement $\mathrm{L}(E) := \mathrm{L}(E,E)$.

Nous laissons au lecteur ou à la lectrice la vérification du fait que $|||\cdot|||$ défini une norme sur $\mathrm{L}(E,F)$. Il est important de se souvenir que, d'après le $(iii)$ de la proposition précédente, si $u \in \mathrm{L}(E,F)$ alors

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq |||u|||\ \|x\|_E.}$$

Donnons deux propriétés de $(\mathrm{L}(E,F), |||\cdot|||)$ qui serviront dans la suite de ce cours.

**Proposition 1.34**

Si $u \in \mathrm{L}(F,G)$ et $v \in \mathrm{L}(E,F)$ alors $u \circ v \in \mathrm{L}(E,G)$ et $|||u \circ v||| \leq |||u||| \cdot |||v|||$.

*Démonstration.* Un calcul direct montre que pour tout $x \in E$

$$\|u \circ v(x)\|_G = \|u(v(x))\|_G \leq |||u|||\ \|v(x)\|_F \leq |||u|||\ |||v|||\ \|x\|_E,$$

ce qui montre que $u \circ v \in \mathrm{L}(E,G)$ et $|||u \circ v||| \leq |||u|||\ |||v|||$. □

**Proposition 1.35**

Si $u \in \mathrm{L}(E,F)$ et si $A \subset E$ est borné, alors $u(A)$ est borné dans $F$.

*Démonstration.* Si $A$ est borné dans $E$ alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\|_E \leq M$. On a alors

$$\forall x \in A, \|u(x)\|_F \leq |||u|||\ \|x\|_E \leq |||u|||\ M.$$

On pose alors $M' = |||u|||\ M$ et on a pour tout $y \in u(A)$, $\|y\|_F \leq M'$, i.e. $u(A)$ est borné. □

**Remarque :** La proposition précédente est fausse dans le cas de l'image réciproque : Si $B \subset F$ est borné, alors $u^{-1}(B)$ n'est pas nécessairement borné. Par exemple, il suffit de considérer l'application linéaire $u : x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ et $B = \{0\}$.

**Définition 1.36: Isomorphisme.**

On dit que $T : E \to F$ est un ***isomorphisme*** si $T$ est une application linéaire continue, bijective, de réciproque $T^{-1} : F \to E$ linéaire continue également.
On note $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de $E$ dans $F$.

**Remarques :**

1. Si $T : E \to F$ est une application linéaire bijective, alors sa réciproque est nécessairement linéaire. En effet :
$$T^{-1}(\lambda y_1+y_2) = T^{-1}(\lambda T(x_1)+T(x_2)) = T^{-1}(T(\lambda x_1+x_2)) = \lambda x_1+x_2 = \lambda T^{-1}(y_1)+T^{-1}(y_2).$$
2. Si $T : E \to F$ est un isomorphisme, alors
$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{\|\!|T^{-1}|\!\|}\|x\|_E \leq \|T(x)\|_F \leq \|\!|T|\!\|\ \|x\|_E.$$

**Proposition 1.37**

Soient $E$ un espace vectoriel et $N_1, N_2$ deux normes sur $E$. Alors $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{Id} : x \in (E, N_1) \mapsto x \in (E, N_2)$ est un isomorphisme.

*Démonstration.* L'application Id considérée ci-dessus est clairement linéaire et bijective (indépendamment des normes considérées). Il faut donc uniquement se convaincre que Id et $\mathrm{Id}^{-1}$ sont continues si et seulement si $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes. Or cela découle simplement des observations suivantes :
$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} : x \in (E, N_1) \mapsto x \in (E, N_2) \text{ continue } &\iff \exists c_1 \geq 0,\ \forall x \in E,\ N_2(x) \leq c_1 N_1(x).\\
\mathrm{Id} : x \in (E, N_2) \mapsto x \in (E, N_1) \text{ continue } &\iff \exists c_2 \geq 0,\ \forall x \in E,\ N_1(x) \leq c_2 N_2(x).
\end{aligned}$$
□

**Remarque :** Si $T : E \to F$ est un isomorphisme, alors on peut définir une nouvelle norme équivalente à $\|\cdot\|_E$ sur $E$ comme suit :
$$\forall x \in E, \quad N(x) = \|T(x)\|_F.$$

**Corollaire 1.38**

Soit $T : E \to F$ un isomorphisme entre deux espaces vectoriels normés, et soit $K \subset E$. Alors

(*i*) $K$ est un ensemble borné de $E$ si et seulement si $T(K)$ est un ensemble borné de $F$.

(*ii*) $K$ est un ensemble fermé de $E$ si et seulement si $T(K)$ est un ensemble fermé de $F$.

(*iii*) $K$ est un ensemble ouvert de $E$ si et seulement si $T(K)$ est un ensemble ouvert de $F$.

En particulier, si $N$ et $N'$ sont deux normes équivalentes sur $E$, alors $K$ est un ensemble borné (respectivement fermé, ouvert) de $(E, N)$ si et seulement si c'est un ensemble borné (respectivement fermé, ouvert) pour $(E, N')$.

## 7 Un peu de topologie dans l'espace des matrices carrées.

Dans cette partie, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il est possible de définir plusieurs normes sur cet espace. On peut par exemple s'inspirer des normes $p$ sur $\mathbb{K}^n$ en définissant
$$\forall M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad N_p(M) := \Big(\sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}|^p\Big)^{1/p}.$$

Une autre approche assez naturelle et d'exploiter les liens entre matrices et applications linéaires sur $\mathbb{K}^n$. Plus précisément, on peut voir $M$ comme la matrice d'une application linéaire de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ dans$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q)$ (où $p, q \geq 1$), et donc on définit la version matricielle de la norme d'opérateur :

$$\forall M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|M\|_{p,q} := \sup\{\|MX\|_q \ \mid \|X\|_p = 1\},$$

où $X$ ci-dessus désigne un vecteur colonne dont les coordonnées dans la base canonique sont $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Il y a évidemment beaucoup d'autres exemples de normes qui présentent souvent un intérêt particulier selon le contexte.

En fait, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un espace de dimension finie, nous verrons que toutes les normes y sont équivalentes et donc elles y définissent la même topologie. C'est pourquoi, on peut considérer n'importe laquelle d'entre elle dans la suite de cette partie, le choix n'aura pas d'importance.

Nous allons nous intéresser d'abord au groupe général linéaire d'ordre $n$ :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est inversible}\}.$$

**Proposition 1.39**

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte, dense et non bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

*Démonstration.* L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue. Or $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, et donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. Montrons ensuite que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui impliquera nécessairement que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas borné. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $M_k = M - \frac{1}{2^k} I_n$. Il est facile de vérifier que $M_k$ converge vers $M$, par exemple pour la norme $N_\infty$ définie un peu plus tôt. Or la suite $(\det(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois. En effet,

$$\det(M_k) = 0 \iff M - \frac{1}{2^k} I_n \text{ non inversible} \quad \iff \frac{1}{2^k} \text{ est une valeur propre de } M.$$

Or l'ensemble des valeurs propres de $M$ est de cardinal au plus $n$, d'où notre affirmation. Ainsi, en notant $I$ l'ensemble des indices $k$ tels que $\det(M_k) = 0$, la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus I} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et elle converge vers $M$, ce qu'il fallait démontrer. □

Considérons maintenant le sous-ensemble des matrices inversibles de déterminant 1, c'est-à-dire le groupe spécial linéaire d'ordre $n$ :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}.$$

**Proposition 1.40**

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est une partie fermée, d'intérieur vide et non bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

*Démonstration.* Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$, c'est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Montrons que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que toute boule $\mathrm{B}(M, r)$ n'est pas incluse dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, ce qui montrera bien que $M$ n'est pas intérieur à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, et donc $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est d'intérieur vide. On considère de nouveau la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $M_k = M - \frac{1}{2^k} I_n$. Cette suite converge vers $M$, et de plus la suite $(\det(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de fois la valeur 1. En effet, sinon le polynôme $\chi_M - 1$ (où $\chi_M$ est le polynôme caractéristique de $M$) admettrait une infinité de racine, i.e. $\chi_M$ est constant et égal à 1, ce qui est impossible puisqu'il est de degré $n$. Ainsi, pour tout $k$ suffisamment grand, on a $M_k \notin \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et de plus $M_k \in \mathrm{B}(M, r)$ car $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $M$.

Pour finir, toute les matrices $D_k := \mathrm{Diag}(k, \frac{1}{k}, 1, \ldots, 1)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ appartiennent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, et un calcul direct montre que $N_\infty(D_k) = k \to +\infty$, et donc $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas borné. $\square$

*Pour aller plus loin :* Bien sûr, on peut se poser les mêmes questions concernant d'autres sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tels que par exemple l'ensemble des matrices de rang $r \in [\![1, n]\!]$, l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales ($\det(M) = \pm 1$), l'ensemble des matrices diagonalisables, etc.

# Chapitre 2

# Compacité et applications

**Motivation :** Vous connaissez certainement le théorème de Bolzano–Weierstrass qui énonce que toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente. Les premières idées de ce résultat sont dues à Bolzano (1781-1848) en 1817 dans sa preuve du théorème des valeurs intermédiaires (à l'aide du théorème des segments emboîtés). Puis c'est Weierstrass (1815-1897), cinquante ans plus tard, qui énonça et démontra le résultat énoncé ci-dessus, en s'inspirant des idées de Bolzano. Notre premier objectif est de généraliser ce résultat pour les espaces vectoriels normés, i.e. on se demande si :

Question :

> *Est-ce qu'une suite bornée dans un espace vectoriel normé admet toujours une sous-suite convergente ?*

Cette question nous mène vers notre définition de la compacité : Un ensemble est dit ***compact*** si toute suite de cet ensemble admet une sous-suite convergente. Cette terminologie est dû à Fréchet (1878-1973) en 1906 qui s'intéressa à des généralisations du théorème de Bolzano–Weierstrass. D'après le premier chapitre, la convergence des suites dépend de la norme considérée, sauf lorsque les normes étudiées sont équivalentes. Or nous avons vu qu'il est possible de définir de nombreuses normes par exemple sur $\mathbb{R}^n$... D'où la question ci-dessous :

Question :

> *Existe-t-il des normes non équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ ?*

L'étude des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$ nous permettra de généraliser le théorème de Bolzano–Weierstrass et de répondre à cette question. La compacité est une notion fondamentale en analyse, elle possède de nombreuses autres applications que celle présentées dans ce cours.

Nous mentionnerons en fin de chapitre le lien entre la compacité et *la propriété de recouvrement de Borel–Lebesgue.* Le nom de cette propriété rend hommage au mathématicien français Émile Borel (1871-1956), qui étudia cette propriété de recouvrement pour les intervalles en 1898, et au mathématicien français Henri Lebesgue (1875-1941) qui améliora le résultat de Borel en 1904. La notion abstraite d'ensemble compact se développa ensuite avec entre autres les travaux de Fréchet, Hausdorff, Alexandroff et Urysohn.

**Notation :** Dans le reste de ce cours, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

# 1 Suites extraites

Commençons par rappeler la définition d'une suite extraite.

**Définition 2.1: Suite extraite/Sous-suite.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$. On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***une sous-suite*** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou ***suite extraite*** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$. On dit qu'une telle application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est ***une extractrice***.

Par exemple, les suites des termes d'indices pairs et impairs, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Remarques :**

- Comme $\varphi$ est strictement croissante, cela implique en particulier que $\varphi$ est injective et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. Parfois, on notera $n_k := \varphi(k)$ et $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ à la place de $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
- Dans certaines démonstrations, nous aurons besoin d'extraire plusieurs sous-suites d'une même suite. Il faut donc comprendre l'élément suivant :

  *"Extraire une sous-suite, c'est composer à droite par l'extractrice."*

  En effet, supposez que vous souhaitez extraire deux sous-suites consécutives d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une première extraction grâce à une extractrice $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vous donne une sous-suite $(u_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquez déjà ici que $(u_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ résulte de la composition de $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in E$ et de $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, i.e. $u \circ \varphi_1$. On observe bien la composition à droite par l'extractrice. On souhaite extraire une nouvelle sous-suite. Notons $v = u \circ \varphi_1$, c'est-à-dire $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On extrait donc une sous-suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce à une seconde extractrice $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ : $(v_{\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. En suivant le même principe que pour la première extraction, $(v_{\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ correspond à $v\circ\varphi_2$. Or $v = u\circ\varphi_1$, donc $v\circ\varphi_2 = u\circ\varphi_1\circ\varphi_2$. Ainsi, deux extractions consécutives sur une même suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnent lieu à la sous-suite $(u_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Rappelons un résultat que vous connaissez certainement déjà pour les suites réelles.

**Proposition 2.2**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$ et $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(*i*) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell$.

(*ii*) Si $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(\|u_{\varphi(n)}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ également.

*Démonstration.* Nous ne démontrons que $(i)$, la preuve de $(ii)$ étant très similaire. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par l'expression $v_n = u_{\varphi(n)}$. Nous souhaitons démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$. Comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a $\varphi(n_0) \geq n_0$ et aussi $\varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0$ pour tout $n \geq n_0$. Au final, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\|v_n - \ell\| = \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Le choix de $\varepsilon$ étant arbitraire, nous avons bien démontré que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$. □

**Définition 2.3: Valeur d'adhérence d'une suite.**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$ et $x \in E$. On dit que $x$ est une ***valeur d'adhérence*** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x$.

**Proposition 2.4**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$ et $x \in E$. Alors $x$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\{u_n \mid n \geq i\}}.$$

*Démonstration.* Supposons que $x$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$. Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé. Il est clair que

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq j} \subset \bigcap_{i=0}^{j} \overline{\{u_n \mid n \geq i\}}.$$

Or la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geq j}$ converge vers $x$ et l'ensemble $\bigcap_{i=0}^{j} \overline{\{u_n \mid n \geq i\}}$ est fermé comme une intersection de tels ensembles. On en déduit donc que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x \in \bigcap_{i=0}^{j} \overline{\{u_n \mid n \geq i\}}.$$

Ceci implique que

$$x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=0}^{j} \overline{\{u_n \mid n \geq i\}} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\{u_n \mid n \geq i\}}.$$

Réciproquement, supposons que $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\{u_n \mid n \geq i\}}$. Nous allons construire par récurrence une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|x - u_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. Ceci terminera la démonstration puisqu'il est évident que cette sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$.
Pour $k = 1$ (initialisation) : Nous savons que $x \in \overline{\{u_n \mid n \geq 1\}}$, et donc par définition de l'adhérence d'un ensemble $\mathrm{B}(x, 1) \cap \{u_n \mid n \geq 1\} \neq \emptyset$. Ainsi il existe $n_1 \in N$ tel que $u_{n_1} \in \mathrm{B}(x, 1)$, i.e. $\|x - u_{n_1}\| < 1$.
Pour "$k \implies k + 1$" (hérédité) : Soit $k \geq 1$ et supposons que $n_1 < \ldots < n_k$ ont été construits. On utilise alors le fait que $x \in \overline{\{u_n \mid n \geq n_k + 1\}}$ pour en déduire l'existence de $n_{k+1}$ tel que $u_{n_{k+1}} \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{2^{k+1}})$. On a bien $\|x - u_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^{k+1}}$, ce qui termine la récurrence et la démonstration. □

## 2 Ensembles compacts

Nous pouvons maintenant donner la définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

**Définition 2.5: Ensemble Compact.**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K$ une partie de $E$. On dit que $K$ est ***un ensemble compact*** (ou ***une partie compacte***) de $E$ si pour toute suite d'éléments de $K$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $K$.

*Pour aller plus loin :* Plus rigoureusement, la définition ci-dessus correspond à la notion de *"compacité séquentielle"*, ou encore à *"la propriété de Bolzano–Weierstrass"*.

**Exemples :**

- Un sous-ensemble fini $K \subset E$ est un compact de $E$. En effet, si $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors pour toute suite dans $K$, l'un des $x_i$ doit apparaître une infinité de fois dans la suite (sinon la suite elle-même serait finie). On peut ainsi extraire une sous-suite qui est constante, donc convergente dans $K$.
- Soit $[a, b]$, où $a < b$, un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $[a, b]$ muni de $|\cdot|$ est compact. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[a, b]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, en vertu *du théorème de Bolzano–Weierstrass*, on peut extraire une sous-suite convergente. De plus sa limite appartient à l'intervalle $[a, b]$ puisque c'est un fermé.

En revanche $(\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas compact. En effet, $\mathbb{R}$ n'est pas un ensemble borné alors qu'un ensemble compact est toujours borné comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 2.6:** ♥

Si $K \subset E$ est compact, alors $K$ est fermé et borné.

*Démonstration.* Commençons par démontrer que $K$ est fermé. Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle des fermés (voir Théorème 1.23). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K$ convergeant vers un élément $\ell \in E$. Par hypothèse $K$ est compact, donc il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelons là $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge dans $K$. Or, d'après la Proposition 2.2, la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement $\ell$. D'où $\ell \in K$ et ainsi $K$ est fermé.

Démontrons maintenant que $K$ est borné. Raisonnons par la contraposée et supposons donc que $K$ n'est pas borné, c'est-à-dire,

$$\forall M > 0, \exists x \in K, \|x\| > M.$$

Nous allons montrer que $K$ n'est pas compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Clairement $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$ et il en est de même pour toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir Proposition 2.2). Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente (en vertu de la Proposition 1.20) et ainsi $K$ n'est pas compact.

□

La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse en générale : il existe des ensembles qui sont fermés et bornés mais qui ne sont pas des compacts (c.f. T.D.). En revanche, la réciproque est vraie si $E$ est de dimension finie. Nous démontrerons cette dernière affirmation un peu plus tard dans ce chapitre, mais nous pouvons déjà le prouver dans le cas $E = \mathbb{R}$.

**Corollaire 2.7: Caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$.**

Soit $K$ une partie de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Alors $K$ est un ensemble compact si et seulement si $K$ est fermé et borné.

*Démonstration.* Dans un sens nous utilisons la Proposition 2.6, et dans l'autre sens nous utilisons le théorème de Bolzano–Weierstrass ainsi que la caractérisation séquentielle des fermés (voir l'exemple $K = [a, b]$ ci-dessus). □

Terminons cette section avec l'étude des sous-ensembles fermés d'un compact.

**Lemme 2.8**

Soit $K \subset E$ un ensemble compact. Si $B \subset K$ est un fermé de $E$, alors $B$ est compact.

*Démonstration.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B$. Puisque $B \subset K$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite d'éléments de $K$. Or $K$ est compact, donc il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $K$ ; Appelons $\ell \in K$ sa limite. Pour terminer, d'après la caractérisation séquentielle des fermés (voir le Théorème 1.23), puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ et $B$ est un fermé nous en déduisons que $\ell \in B$. Ceci démontre bien que toute suite de $B$ admet une sous-suite convergente dans $B$ et donc que $B$ est compact. □

Pour démontrer qu'un ensemble $K \subset E$ n'est pas compact, on peut en premier lieu essayer de déterminer si il est fermé et borné. En effet, d'après la Proposition 2.6, si $K$ n'est pas fermé ou pas borné, alors $K$ n'est pas compact. Puis, si cela ne fonctionne pas, on peut essayer de construire une suite $\varepsilon$-écartée (où $\varepsilon > 0$) à valeurs dans $K$ :

**Lemme 2.9**

Si $K \subset E$ contient une suite $\varepsilon$-écartée (où $\varepsilon > 0$), i.e. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ telle que

$$\forall n \neq m \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - u_m\| > \varepsilon,$$

alors $K$ n'est pas compact.

*Démonstration.* Supposons que $K$ contienne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\varepsilon$-écartée avec $\varepsilon > 0$. Alors, toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et également $\varepsilon$-écartée. En particulier, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente. En effet, si cela était le cas, on aurait l'existence de $\ell \in E$ et de $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n, m \geq N$ :

$$\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(m)}\| \leq \|u_{\varphi(n)} - \ell\| + \|\ell - u_{\varphi(m)}\| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ce qui contredirait l'aspect $\varepsilon$-écartée de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc démontré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente, et donc $K$ n'est pas compact. □

## 3 Compacité et continuité

Tout d'abord, étudions l'image directe d'un compact par une application continue.

**Proposition 2.10:** ♥

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue. Si $K$ est un compact de $E$ alors $f(K)$ est un compact de $F$.

*Démonstration.* Montrons que $f(K)$ est compact. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(K)$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in f(K)$ et donc il existe $u_n \in K$ tel que $f(u_n) = v_n$. Ainsi on obtient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $K$. Puisque $K$ est compact, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\ell \in K$. Enfin, l'application $f$ est continue et donc $(f(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}} = (v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$ d'après la caractérisation séquentielle de la continuité (Théorème 1.29), ce qui conclut la démonstration. □

**Remarque :** L'image réciproque $f^{-1}(K)$ d'un compact $K \subset F$ n'est pas nécessairement un compact de $E$. Par exemple, pour $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ nous avons $\{0\}$ qui est un compact de $\mathbb{R}$ mais pour autant $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ n'est pas compact.

**Corollaire 2.11**

(*i*) Si $f : E \to F$ est continue, bijective, et de réciproque continue alors $K$ est un compact de $E$ si et seulement si $f(K)$ est un compact de $F$.

(*ii*) Si $N$ et $N'$ sont deux normes équivalentes sur $E$, alors $K$ est un compact de $(E, N)$ si et seulement si c'est un compact de $(E, N')$.

La démonstration du corollaire ci-dessus est essentiellement basé sur la Proposition 2.10, nous la laissons au lecteur ou à la lectrice. Si $f$ vérifie les hypothèses de $(i)$ on dit que $f$ est un ***homéomorphisme***. En particulier, un isomorphisme est un homéomorphisme qui est linéaire.

On retrouve également un résultat qui généralise un classique sur les fonctions réelles.

**Corollaire 2.12**

Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une application continue où $K$ un compact d'un espace vectoriel normé $E$. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.

*Démonstration.* D'après la proposition précédente, $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$ et donc $f(K)$ est fermé et borné d'après la Proposition 2.6. Ceci montre déjà que $f$ est borné. Montrons maintenant que $f$ atteint sa borne supérieure $\sup_{x\in K} f(x)$ ; Le raisonnement étant identique pour la borne inférieure, on laisse au lecteur ou à la lectrice le soin de le vérifier (ou encore, cela découle également du résultat pour la borne supérieure et du fait que $\inf_{x\in K} f(x) = -\sup_{x\in K} -f(x)$). En utilisant la caractérisation de la borne supérieure, on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(u_n) > \sup_{x\in K} f(x) - \frac{1}{n}.$$

Par compacité de $K$, on extrait une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\ell \in K$. Puisque $f$ est continue, $f(u_{\varphi(n)})$ tend vers $f(\ell)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. En passant à la limite dans

$$f(u_{\varphi(n)}) > \sup_{x\in K} f(x) - \frac{1}{\varphi(n)},$$

on obtient que $f(\ell) \geq \sup_{x \in K} f(x)$. Comme l'autre inégalité est évidente, on obtient bien l'existence de $\ell \in K$ tel que $f(\ell) = \sup_{x \in K} f(x)$. $\square$

Et enfin nous terminons avec le cas des fonctions continues et bijectives.

**Proposition 2.13**

Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue. On suppose que $K$ est un compact de $E$ et que $f : K \to f(K)$ est une bijection. Alors $f^{-1} : f(K) \to K$ est continue.

*Démonstration.* Nous allons montrer que $f^{-1} : f(K) \to K$ est continue par la caractérisation séquentielle. Soit $y \in f(K)$ et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(K)$ qui converge vers $y$. Alors il existe un unique $x \in K$ tel que $f(x) = y$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. Il s'agit de montrer que $f^{-1}(y_n)$ tend vers $f^{-1}(y)$, i.e. que $x_n$ tend vers $x$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $K$ qui est compact, donc elle admet une sous-suite convergente.

Soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain $x' \in K$. Par continuité de $f$, on a

$$\lim_n f(x_{\varphi(n)}) = f(x').$$

Or, par construction $f(x_{\varphi(n)}) = y_{\varphi(n)}$ et $\lim_n y_{\varphi(n)} = y$. Par unicité de la limite, on a donc $f(x') = y$ i.e. $x = x'$.

En d'autres termes, nous venons de démontrer que si une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est nécessairement $x$. Ceci implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même doit converger vers $x$. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $x$ alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \quad \|x_n - x\| > \varepsilon.$$

Il est alors assez direct de construire une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|x - x_{\varphi_1(n)}\| > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc aucune sous-suite de $(x_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers $x$, ce qui est une contradiction du raisonnement ci-dessus. On a donc bien démontré que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$, i.e. $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{-1}(y)$. $\square$

**Remarques :**

- Sans l'hypothèse de compacité sur $K$, la proposition précédente n'est pas valable. Par exemple, la fonction $f : t \in [0, 2\pi[ \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ réalise une bijection entre $[0, 2\pi[$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{C}$ (si l'on aime pas travailler dans $\mathbb{C}$, on peut voir $f$ comme la fonction à valeur dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$). La fonction $f$ est continue (même 1-lipschitzienne !). En revanche, $f^{-1} : z = e^{it} \in \mathcal{C} \mapsto t \in [0, 2\pi[$ n'est pas continue en $1 \in \mathbb{C}$ (où en $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ si vous préférez). En effet, si on considère la suite de terme général $u_n = e^{i(2\pi - \frac{1}{2^n})} \in \mathcal{C}$, alors $u_n \to e^{2i\pi} = 1 \in \mathcal{C}$. Or $f^{-1}(u_n) = 2\pi - \frac{1}{2^n} \to 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1)$. Par la caractérisation séquentielle de la continuité, $f^{-1}$ n'est pas continue en 1.
- Cependant, pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut se passer de la compacité puisque nous avons le résultat suivant (à mettre en lien avec le théorème de la bijection) : Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to J$ est une fonction continue et bijective, alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f$ est strictement monotone, et $f^{-1}$ est continue (i.e. $f$ est un homéomorphisme).

# 4 Produit d'ensembles compacts

**Définition 2.14: Produit fini d'espaces vectoriels normés.**

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ une famille de $n$ espaces vectoriels normés avec $n \geq 2$. Alors on peut définir une norme sur l'espace vectoriel

$$\prod_{i=1}^{n} E_i := E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\}$$

par la formule suivante :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \quad N(x_1, \ldots x_n) = N_1(x_1) + \ldots + N_n(x_n).$$

On laissera au lecteur ou à la lectrice la vérification du fait que l'application $N$ définit une norme sur $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

**Remarque :** Nous aurions pu définir la norme $N$ différemment. En effet, notre choix ci-dessus correspond à la norme 1, mais nous aurions pu choisir de nous inspirer des autres normes $p$. Par exemple $N_\infty(x) = \max\{N_i(x_i) \mid i = 1 \ldots n\}$. En fait, ce choix importe peu pour la suite de ce chapitre puisque ces normes s'avèrent être équivalentes.

Notre prochain objectif est de montrer qu'un produit (cartésien) fini d'ensembles compacts est compact.

**Proposition 2.15**

Soients $(E_1, N_1)$, ... , $(E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés et $K_1 \subset E_1$ , ... , $K_n \subset E_n$ des ensembles compacts ($n \geq 2$). Alors $K_1 \times \ldots \times K_n$ est un compact de $E_1 \times \ldots \times E_n$.

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation ($n = 1$) est évidente. Nous allons démontrer la propriété pour $n = 2$. En effet, le cas $n = 2$ sera très utile pour démontrer l'hérédité.

**Cas n = 2.** Soit $A$ un compact de $E_1$ et $B$ un compact de $E_2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A \times B$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $u_n = (x_n, y_n)$. Puisque $A$ est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $A$. Ainsi il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x \in A$. Ensuite la suite $(y_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'ensemble compact $B$, donc elle admet également une sous-suite convergente. Par conséquent, il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $y \in B$. Puisque la suite $(x_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$, sa sous-suite $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ également. En d'autres termes :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_{\varphi_1\circ\varphi_2}(n) - x\|_E = 0 \quad \text{et} \lim_{n\to+\infty} \|y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} - y\|_F = 0.$$

On en déduit alors très simplement que

$$N\left((x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}, y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}) - (x, y)\right) = \|x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} - x\|_E + \|y_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} - y\|_F \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous avons bien démontré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(u_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $(x, y) \in A \times B$, et donc $A \times B$ est compact.

**Hérédité.** Pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, soit $K_i$ un compact de $E_i$. Par hypothèse de récurrence $K := K_1 \times \ldots \times K_k$ est un sous-ensemble compact de $E_1 \times \ldots \times E_k$. Or, on a $K_1 \times \ldots \times K_{k+1} = K \times K_{k+1}$. Le cas $n = 2$ appliqué à $K \times K_{k+1}$ implique que $K_1 \times \ldots \times K_{k+1}$ est un ensemble compact, cqfd. □

*Pour aller plus loin :* On peut s'interroger sur la validité d'un tel résultat pour un produit infini d'ensembles compacts. La réponse est que cela dépend de la "topologie" que l'on choisit de considérer sur le produit. D'un côté il y a des contre-exemples si nous définissons une norme sur l'espace produit de manière similaire à ce que nous avons fait ci-dessus. D'un autre côté le *théorème de Tychonov* affirme qu'un produit quelconque d'espaces compacts, muni de *la topologie produit*, est un compact.

**Exercice :** Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à coefficients dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Démontrer que le sous-ensemble

$$\prod_{i=1}^{\infty}[-1,1] = [-1,1]^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq x_n \leq 1\}$$

n'est pas compact. Remarquez pourtant qu'il s'agit d'un produit dénombrable de compacts de $\mathbb{R}$.

## 5 Cas de la dimension finie

Nous allons appliquer les résultats des sections précédentes pour caractériser les ensembles compacts en dimension finie. Premièrement, nous traitons le cas de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) = \prod_{i=1}^{n}(\mathbb{R}, |\cdot|)$$

puis d'appliquer les résultats sur les produits cartésiens d'ensembles compacts.

**Proposition 2.16: Compacité de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme 1.**

Dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, une partie $K$ est compacte si et seulement elle est fermée et bornée.

*Démonstration.* D'après la proposition 2.6, un ensemble compact dans un espace vectoriel normé est toujours fermé et borné. Il suffit donc de démontrer que si $K \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et borné alors $K$ est compact. Puisque $K$ est borné, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$,

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \leq M.$$

En particulier $|x_i| \leq M$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En d'autres termes :

$$K \subset \prod_{i=1}^{n}[-M, M].$$

D'après le Corollaire 2.7, l'ensemble $[-M, M]$ est compact. Par conséquent, d'après la Proposition 2.15, l'ensemble $\prod_{i=1}^{n}[-M, M]$ est compact. Pour terminer, $K$ est un sous-ensemble fermé de $\prod_{i=1}^{n}[-M, M]$, donc $A$ est également compact d'après le Lemme 2.8. □

Exactement la même démonstration fonctionne pour $\mathbb{C}^n$ en remplaçant $[-M, M]$ par $\overline{\mathrm{B}}(0, M) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\}$ qui est également un ensemble compact d'après le résultat $(i)$ ci-dessous.

**Corollaire 2.17: Caractérisation des compacts de $\mathbb{C}$ / $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$.**

$(i)$ Soit $K$ une partie de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Alors $K$ est compact si et seulement si $K$ est fermé et borné.

$(ii)$ Soit $K$ une partie de $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$. Alors $K$ est compact si et seulement si $K$ est fermé et borné.

*Démonstration.* Nous ne démontrons que l'assertion $(i)$, puisque une fois $(i)$ obtenue, la preuve de $(ii)$ est la même que pour la Proposition 2.16.
La Proposition 2.6 nous donne déjà un sens, montrons donc l'autre implication. Soit $K$ un fermé borné de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Remarquez que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ peut être identifié à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. En effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$|x + iy| = \|(x, y)\|_2.$$

Autrement dit, l'application $T : x + iy \in \mathbb{C} \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme. Ainsi, $K$ est un compact de $\mathbb{C}$ si et seulement si $T(K) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in K\}$ est compact de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ (voir le Corollaire 2.11). Puis nous avons vu que les normes 1 et 2 sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ (voir page 12). Donc, encore d'après le Corollaire 2.11, $K$ est un compact de $\mathbb{C}$ si et seulement si $T(K)$ est compact de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. Comme $K$ est fermé et borné et comme $T$ est un isomorphisme, $T(K)$ est fermé et borné dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ (cf. Corollaire 1.38). On applique alors la Proposition 2.16 pour affirmer que $T(K)$ est un compact de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, ce qui termine la démonstration. □

**Théorème 2.18: Équivalence des normes en dimension finie.**

Si $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes sur $E$ sont équivalentes.

*Démonstration.* Notre premier objectif est de justifier que l'on peut supposer que $E = \mathbb{K}^n$ où $n = \dim(E)$. En effet, fixons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes sur $E$, alors on définit les applications $N, N' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ par

$$N(x_1, \ldots, x_n) := \|x_1 e_1 + \ldots x_n e_n\| \quad \text{et} \quad N'(x_1, \ldots, x_n) := \|x_1 e_1 + \ldots x_n e_n\|'.$$

Il est très facile de vérifier que $N$ et $N'$ définissent deux normes sur $\mathbb{K}^n$. De plus $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes si et seulement si $N$ et $N'$ le sont. Ainsi, il suffit de raisonner sur $\mathbb{K}^n$.

Soit $N$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Nous allons montrer que $N$ est équivalente à $\|\cdot\|_1$, ce qui montrera bien que toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes entre elles. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ s'écrit donc $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. En notant $M := \max\{N(e_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\}$ et en appliquant l'inégalité triangulaire on obtient

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq M \sum_{i=1}^n |x_i| \leq M\|x\|_1.$$

On peut alors en déduire que l'application $N : (E, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}_+$ est $M$-lipschitzienne. En effet, la relation précédente appliquée à $x - y$ au lieu de $x$ ainsi que l'inégalité triangulaire renversée nous donne :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq M\|x - y\|_1.$$

En particulier $N : (E, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}_+$ est continue.

Posons maintenant $S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ pour la norme 1. Il s'agit d'un fermé borné de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$, et donc c'est un compact de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ d'après la Proposition 2.16. Par conséquent, l'application continue $N : (E, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes sur $S_1$ (voir le Corollaire 2.12). Il existe donc $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ tels que

$$(\star) \quad \forall x \in \mathrm{S}_1, \quad c_1 \leq N(x) \leq c_2.$$

Remarquons que $c_2 > c_1 > 0$. En effet, si $c_1 = 0$ alors il existe $x \in S_1$ tel que $N(x) = 0$, ce qui est impossible car $x$ est non nul et $N$ est une norme. Soit alors $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur non nul. On a par homogénéité de la norme $\frac{x}{\|x\|_1} \in S_1$. Ainsi, d'après $(\star)$ on a

$$c_1 \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \leq c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_1\|x\|_1 \leq N(x) \leq c_2\|x\|_1.$$

Ces inégalités sont également vérifiées si $x = 0$ car alors $N(x) = \|x\|_1 = 0$, ce qui conclut la démonstration. □

**Remarque :** Le théorème ci-dessus est qualitatif mais pas quantitatif : Il affirme que les normes sont équivalentes mais il ne donne pas explicitement les constantes d'équivalences. La plupart du temps ces constantes dépendent de la dimension (cf. T.D.).

**Théorème 2.19: Caractérisation des compacts en dimension finie.**

Dans un espace vectoriel normé $E$ de dimension finie, une partie $K$ est compacte si et seulement si $K$ est fermé et borné.

*Démonstration.* Par le même argument que dans la précédente démonstration, nous pouvons supposer que $E = \mathbb{K}^n$. En effet, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$ alors l'application $T : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in (E, \|\cdot\|) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{K}^n, N)$ est un isomorphisme, où $N$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ donnée par l'expression :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), \quad N(x_1, \ldots, x_n) := \|x_1 e_1 + \ldots x_n e_n\|.$$

Puis, nous savons que toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes à la norme 1. On conclut alors grâce à la caractérisation des compacts dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ (Proposition 2.16 dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et Corollaire 2.17 dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et grâce à la stabilité des propriétés "fermé borné" et "compact" par passage à une norme équivalente (voir Corollaire 1.38 et Corollaire 2.11). □

*Pour aller plus loin :* Le théorème de Riez (cf. T.D.) affirme que la réciproque du théorème précédent est vraie. Ainsi $E$ est de dimension finie si et seulement si les compacts de $E$ sont exactement les fermés bornés.

Nous terminons cette section avec une dernière application de l'équivalence des normes en dimension finie.

**Corollaire 2.20: Continuité des applications linéaires en dimension finie.** ♥

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, avec $E$ de dimension finie. Alors toute application linéaire de $E$ dans $F$ est continue.

*Démonstration.* D'après le Théorème 1.32, une application linéaire $f : E \to F$ est continue sur $E$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Puisque $E$ est de dimension finie, on peut en fixer une base $(e_1, \dots, e_n)$ et ainsi tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Un calcul direct montre alors que

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\|_F$$

Or, l'application $N : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i| \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur $E$. Puisque toutes les normes sur $E$ sont équivalentes, il existe $c > 0$ tel que $N(x) \leq c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, en notant $M = \max\{\|f(e_i)\|_F \mid i \in [\![1, n]\!]\}$, on a

$$\|f(x)\|_F \leq MN(x) \leq Mc\|x\|_E,$$

ce qui termine la démonstration. □

# 6 BONUS : Propriété de Borel–Lebesgue

**Définition 2.21: Recouvrements.**

Soit $A$ une partie d'un espace vectoriel normé $E$, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$.

- On dit que $(U_i)_{i\in I}$ est un ***recouvrement*** de $A$ si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.
- Si de plus $I$ est un ensemble fini, alors on dit que $(U_i)_{i\in I}$ est un ***recouvrement fini*** de $A$.
- Si $J \subset I$ et $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$, alors on dit que $(U_i)_{i\in J}$ est un ***sous-recouvrement*** de $A$.

Notre prochain objectif est de montrer qu'un sous-ensemble $K$ d'un espace vectoriel normé $E$ est compact si et seulement si il vérifié ***la propriété de Borel–Lebesgue :***

*(BL) : De tout recouvrement de $K$ par une famille d'ouverts,*
*on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Commençons par démontrer que, dans (BL), on peut remplacer "une famille d'ouverts" par une "famille de boules ouvertes".

**Proposition 2.22**

Un ensemble $K$ dans un espace vectoriel normé $E$ vérifie (BL) si et seulement si de tout recouvrement de $K$ par une famille de boules ouvertes, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

*Démonstration.* Le sens direct " $\Longrightarrow$ " est évident puisque les boules ouvertes sont des ouverts. Montrons donc l'implication réciproque. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $E$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ et $O_i$ est ouvert pour tout $i \in I$. Alors chaque ouvert $O_i$ peut être écrit comme une union de boules ouvertes. En effet, par définition, $O_i$ est ouvert si et seulement si pour tout $x \in O_i$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r_x) \subset O_i$. Par conséquent $O_i = \bigcup_{x\in O_i} B(x, r_x)$. Ainsi $K$ peut être recouvert par une famille de boules ouvertes. Par hypothèse, on peut en extraire un sous-recouvrement fini :

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in E,\ \exists r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad K \subset \bigcup_{j=1}^n \mathrm{B}(x_j, r_j).$$

Or, par construction, chacune de ces boules est incluses dans un certain $O_i$ :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \exists i_j \in I, \quad \mathrm{B}(x_j, r_j) \subset O_{i_j}.$$

On en déduit alors un sous-recouvrement fini de la famille initiale $(O_i)_{i \in I}$ :

$$K \subset \bigcup_{j=1}^n \mathrm{B}(x_j, r_j) \subset \bigcup_{j=1}^n O_{i_j}.$$

□

**Corollaire 2.23**

Si $K \subset E$ vérifie (BL), alors $K$ est ***précompact***, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists x_1, \ldots, x_n \in K, \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{B}(x_i, \varepsilon).$$

*Démonstration.* Il suffit d'écrire $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$ puis d'extraire un sous-recouvrement fini en utilisant la proposition précédente. □

Nous arrivons enfin au résultat souhaité : Les propriétés de Bolzano–Weierstrass et de Borel–Lebesgue sont équivalentes dans les espaces vectoriels normés.

**Théorème 2.24: Propriété de Borel-Lebesgue.**

Soit $K$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé $E$. Alors $K$ est compact si et seulement si $K$ vérifie (BL).

*Pour aller plus loin :* Dans des espaces plus généraux (espaces métriques, espaces topologiques), la propriété de Borel–Lebesgue est en général celle qui est donnée pour définir la notion de compacité.

Une application classique est le résultat suivant qui sera démontré en TD.

**Théorème 2.25: Théorème de Heine**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $K$ une partie compacte de $E$. Si $f : K \to F$ est continue alors $f$ est uniformément continue sur $K$, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in K^2, \quad \big[\|x - y\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon\big].$$

42

# Chapitre 3

# Suites de Cauchy et espaces complets

**Motivation :** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\mathrm{Ent}(10^n\sqrt{2})}{10^n}.$$

Cette suite est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ (qui est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). Cette suite, vue comme une suite réelle, converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$. Puisque la limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$, d'après la définition de limite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. En changeant $\sqrt{2}$ par n'importe quel réel irrationnel, on obtient ainsi une infinité de suites dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, mais qui converge vers "un point manquant à $\mathbb{Q}$". Remarquez que $\mathbb{Q}$ n'est pas le seul espace vectoriel dans lequel on peut produire ce genre de suites. Par exemple, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$c_{00} := \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x_n = 0\Big\}$$

muni de la norme infinie $\|u_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$$

converge vers $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 := \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\Big\}$.
Questions :

> *Mais alors, peut-on produire de tels exemples dans n'importe quel espace vectoriel normé ? Y a-t-il des espaces qui ne possèdent pas de "points manquants" ? Comment peut-on distinguer les suites qui divergent réellement des suites qui convergent vers "des points manquants de E" ?*

En fait, il y a une propriété qui caractérise de manière intrinsèque la convergence d'une suite vers un point manquant (i.e. la convergence dans un espace plus grand, au sens où nous l'avons définie dans le premier chapitre) : C'est la notion de suite de Cauchy. Si $E \subset F$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ est une suite qui converge vers $\ell \in F \setminus E$, alors

$$\|u_n - u_m\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell - u_m\| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les espaces qui ne possèdent pas de points manquants, i.e où toute suite de Cauchy converge dans l'espace, sont appelés espaces complets (notion abstraite introduite par Fréchet en 1906).

# 1 Suites de Cauchy

**Définition 3.1**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite de Cauchy*** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad [n, m \geq n_0 \implies \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon].$$

**Proposition 3.2**

1. Toute suite convergente est de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente.

*Démonstration.*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Nous allons démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$ arbitraire. D'après la définition de convergence, si $\ell$ est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En particulier, si $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$ alors

$$\|u_n - u_m\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, ce choix de $n_0$ convient dans la définition de suite de Cauchy.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Nous allons démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. D'après la définition de suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$, $\|u_n - u_m\| \leq 1$. D'après l'inégalité triangulaire renversée nous en déduisons que (avec $m = n_0$)

$$\forall n \geq n_0, \quad \|u_n\| \leq 1 + \|u_{n_0}\|.$$

Posons alors $m = \max\{\|u_0\|, \dots, \|u_{n_0-1}\|\}$ puis $M = \max\{m, 1 + \|\ell\|\}$. Il est facile de vérifier que ce choix de $M$ convient : $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente vers un certain $\ell \in E$. Nous allons démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $n_0 \in N$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \left[n, m \geq n_0 \implies \|u_n - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Puis par définition de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left[n \geq n_1 \implies \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Puisque $\varphi$ est une extractrice, nous avons $\varphi(n_1) \geq n_1 \implies \varphi(n_1) \geq n_0$. En particulier $\|u_n - u_{\varphi(n_1)}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $n \geq n_1 \geq n_0$. On utilise alors l'inégalité triangulaire pour conclure :

$$\forall n \geq n_1, \quad \|u_n - \ell\| \leq \|u_n - u_{\varphi(n_1)}\| + \|u_{\varphi(n_1)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

⚠ Il existe des suites qui sont de Cauchy mais qui ne sont pas convergentes ; voir les exemples donnés en introduction.

**Remarque :** Si deux normes sont équivalentes, alors une suite de Cauchy pour l'une des deux normes est également de Cauchy pour la deuxième, et réciproquement. En particulier, puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$, si une suite est de Cauchy pour une norme sur $\mathbb{K}^n$, alors c'est une suite de Cauchy pour toutes les normes de $\mathbb{K}^n$.

Les suites de Cauchy permettent de caractériser les espaces précompacts.

**Proposition 3.3: (Bonus)**

Soit $K \subset E$ un sous-ensemble borné. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $K$ est précompact : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists x_1, \dots, x_n \in K, \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$.

$(ii)$ Pour toute suite d'éléments de $K$, on peut extraire une sous-suite de Cauchy.

## 2 Ensemble complets

**Définition 3.4: Ensemble complet dans un evn.**

On dit qu'un sous-ensemble $K \subset E$ est ***complet*** si toute suite de Cauchy à valeurs dans $K$ est convergente dans $K$.

**Exemples :**

- L'espace normé $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet. En effet la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$u_n = \frac{\mathrm{Ent}(10^n\sqrt{2})}{10^n}$$

est de Cauchy mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (elle converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$).

- L'espace normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Il faut s'arrêter un instant sur cet exemple. Pour montrer que $\mathbb{R}$ est complet, il y a plusieurs options. En fait, tout dépend de la construction de $\mathbb{R}$ qui vous a été présentée. Par exemple, il est possible de construire $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy à valeurs rationnelles, et alors le fait que $\mathbb{R}$ est complet n'est qu'une conséquence directe de cette construction (voir l'article correspondant sur Wikipedia : "Construction des nombres réels").

Mais il est fort possible que l'on vous ait simplement présenté $\mathbb{R}$ via l'un de ses axiomes équivalents, tels que *"la propriété de la borne supérieure"*, *"le théorème de la limite monotone"* ou encore *"le théorème des segments emboîtés"*. Dans tous les cas, vous avez alors utilisé l'une de ces propriétés pour démontrer le théorème de Bolzano–Weierstrass, qui peut à son tour être utilisé comme suit pour démontrer que $\mathbb{R}$ est complet. En fait on a le résultat plus général suivant :

**Théorème 3.5**

Si $E$ est un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie, alors $E$ est complet.

*Démonstration.* Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$. L'application

$$T : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in (E, \|\cdot\|) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{K}^n, N)$$

est un isomorphisme, où $N$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ donnée par l'expression :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), \quad N(x_1, \ldots, x_n) := \|x_1 e_1 + \ldots x_n e_n\|.$$

Puisque la complétude est conservée par isomorphisme, on peut donc supposer que $E = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Aussi, puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$, nous pouvons choisir de travailler avec n'importe quelle norme de $\mathbb{K}^n$. Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}^n$. D'après la Proposition 3.2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc il existe $R > 0$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathrm{B}}(0, R)$. Puisque $\overline{\mathrm{B}}(0, R)$ est un fermé borné dans $\mathbb{K}^n$ (de dimension finie), nous savons d'après le chapitre précédent que $\overline{\mathrm{B}}(0, R)$ est compact (voir Théorème 2.19). Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente (i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence). Nous utilisons alors de nouveau la Proposition 3.2 pour conclure : Une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente. □

**Proposition 3.6**

Soit $K$ un sous-ensemble de $E$

1. Si $K$ est complet alors $K$ est fermé.
2. Si $F \subset K$ et $K$ est complet, alors $F$ est complet si et seulement si $F$ est fermé.

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice (c.f. T.D.).

**Exemples :** Grâce à la proposition précédente, nous pouvons affirmer que l'intervalle $[a, b]$ est complet puisqu'il est fermé dans $\mathbb{R}$ qui est complet. En revanche, les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ ou encore $]a, b[$ ne sont pas complets puisque ce ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$. En fait on peut généraliser ces résultats en dimension finie :

**Corollaire 3.7**

Si $K$ est un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé de dimension finie, alors $K$ est complet si et seulement si $K$ est fermé.

**Définition 3.8: Espace de Banach.**

On dit que $E$ est un espace de ***Banach*** si c'est un espace vectoriel normé complet.

Nous énonçons la proposition suivante dans ce nouveau langage, elle servira plus tard dans le cours.

**Corollaire 3.9**

Un sous-espace de dimension finie d'un espace de Banach est fermé.

Nous terminons cette section avec la démonstration de deux théorèmes. Le premier généralise le théorème des segments emboîtés dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 3.10: Théorème des fermés emboîtés.** ♥

Soient $E$ un espace vectoriel normé, $K \subset E$ un sous-ensemble complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $K$ telle que :

$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n$ est fermé, borné et non vide ;

$(ii)$ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, i.e., $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$ ;

$(iii)$ Le diamètre de $F_n$ tend vers 0, i.e., $\operatorname{diam}(F_n) := \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in F_n\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors il existe $x \in K$ tel que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k = \{x\}$.

*Démonstration.* Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $K$ vérifiant les propriétés $(i)$, $(ii)$ et $(iii)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \neq \emptyset$ et donc il existe $x_n \in \mathcal{F}_n$. Nous allons montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après $(iii)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [n \geq n_0 \implies \operatorname{diam}(F_n) \leq \varepsilon].$$

Soit alors $n, m \geq n_0$. D'après $(ii)$, $F_n \subset F_{n_0}$ et $F_m \subset F_{n_0}$. Ainsi $x_n, x_m \in F_{n_0}$. Par conséquent

$$\|x_n - x_m\| \leq \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in F_{n_0}\} = \operatorname{diam}(F_{n_0}) \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre bien que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Ensuite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $K$ est complet donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x \in K$. On remarque alors que chaque sous-suite $(x_n)_{n\geq k}$, $k \in \mathbb{N}$, est incluse dans $F_k$ (on utilise à nouveau $(ii)$ ici). Or $F_k$ est fermé et $(x_n)_{n\geq k}$ converge vers $x$. Par conséquent, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \in F_k$ et ainsi

$$\{x\} \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$$

L'inclusion réciproque provient alors de $(iii)$ : Si $z \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leq \|z - x\| \leq \operatorname{diam}(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc $\|z - x\| = 0$, c'est à dire $z = x$. Ainsi $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \subset \{x\}$, d'où l'égalité. □

**Remarques :**

- Le théorème ci-dessus est à comparer avec le *théorème des compacts emboîtés* : Dans un espace compact $K$, l'intersection de toute suite décroissante de fermés non vides est (un compact) non vide. On laisse en exercice la démonstration de ce dernier résultat (il suffit de s'inspirer de la première partie de la preuve ci-dessus).

- Considérez $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $F_n = [n, +\infty[$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui est complet. Que vaut alors $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ ?
  Le problème dans l'exemple ci-dessus est qu'aucun des ensembles $F_n$ n'est borné, et donc $(i)$ et à fortiori $(iii)$ ne sont pas vérifiés. En fait, il est même possible de trouver un contre-exemple à ce théorème dans le cas où $(i)$ et $(ii)$ sont vérifiés mais pas $(iii)$ (cf. T.D.).

- Le théorème ci-dessus caractérise la complétude de $K$ dans le sens suivant : $K$ est complet si et seulement si $K$ vérifie le théorème des fermés emboîtés.

Nous terminons avec une nouvelle caractérisation de la compacité dans un espace vectoriel normé.

**Théorème 3.11: (Bonus)**

Un ensemble $K \subset E$ est compact si et seulement si il est précompact et complet.

# 3 Quelques exemples d'espaces de Banach

## 3.1 Ensemble des applications linéaires.

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés. Rappelons que $\mathrm{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$, et c'est aussi un espace vectoriel normé où la norme est donnée par

$$\forall\, T \in \mathrm{L}(E,F), \quad |||T||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

**Proposition 3.12:** ♥

Si $F$ est complet, alors $\mathrm{L}(E,F)$ est complet.

*Démonstration.*

**Étape 1 :** *"Se ramener à un espace dont on sait qu'il est complet pour obtenir un candidat potentiel pour la limite".*
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathrm{L}(E,F)$. On suppose que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et nous souhaitons démontrer qu'elle converge. Fixons $x \in E$. On a alors

$$\forall n,m \in \mathbb{N}, \quad \|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq |||T_n - T_m||| \cdot \|x\|_E.$$

Puisque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, on peut en déduire facilement que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $F$. Comme $F$ est complet, nous savons alors que la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; Notons $T(x)$ sa limite.
On obtient ainsi un candidat pour la limite de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : l'application $T : x \in E \mapsto T(x) \in F$. Pour conclure, nous devons montrer que $T \in \mathrm{L}(E,F)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||T - T_n||| = 0$.

**Étape 2 :** *"Montrer que le candidat pour être à la limite appartient à l'espace considéré".*
Commençons par montrer que $T \in \mathrm{L}(E,F)$. La linéarité de $T$ s'obtient par linéarité de la limite :

$$T(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda T_n(x)+T_n(y)\big) = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x)+\lim_{n\to\infty} T_n(y) = \lambda T(x)+T(y).$$

Montrons maintenant la continuité de $T$. Puisque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée, disons par un certain $C > 0$. On a alors pour tout $x \in E$ :

$$\|T(x)\|_F = \lim_{n\to+\infty} \|T_n(x)\|_F \leq \lim_{n\to+\infty} |||T_n||| \|x\|_E \leq \lim_{n\to+\infty} C\|x\|_E = C\|x\|_E.$$

Ainsi $T$ est continue avec $|||T||| \leq C$.

**Étape 3 :** *"Montrer que le candidat est effectivement la limite de la suite étudiée".*
Enfin, démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||T - T_n||| = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n,m \in \mathbb{N}, \quad [n,m \geq n_0 \implies |||T_n - T_m||| \leq \varepsilon]\,.$$

On a alors pour tout $n,m \geq n_0$ et pour tout $x \in B_E$ (boule unité de $E$), $\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \varepsilon$, et on passe à la limite lorsque $m \to +\infty$ pour obtenir (on utilise la continuité de la norme) :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in B_E, \quad \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Un simple passage à la borne supérieure sur $x \in B_E$ permet de conclure :

$$\forall n \geq n_0, \quad |||T - T_n||| \leq \varepsilon.$$

□

## 3.2 Ensemble des fonctions continues sur un compact.

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, et soit $K \subset E$ un ensemble compact. Alors on considère l'ensemble des fonctions continues de $K$ dans $F$ :

$$\mathcal{C}(K, F) := \{f : K \to F \text{ continue}\}.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel, et on va considérer la norme infinie sur cet espace, c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathcal{C}(K, F), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|_F.$$

**Proposition 3.13**

Si $F$ est complet, alors $\mathcal{C}(K, F)$ est complet.

*Démonstration.* La démonstration étant très similaire à celle pour $\mathrm{L}(E, F)$ ci-dessus et celle pour $\ell_\infty$ ci-dessous, elle est donc laissée en exercice. □

## 3.3 Ensemble des suites bornées.

Nous allons maintenant considérer l'ensemble des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$ :

$$\ell_\infty(\mathbb{N}) := \left\{ (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| < \infty \right\}.$$

Muni de la norme infinie, i.e.

$$\forall x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty, \quad \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|,$$

l'ensemble $\ell_\infty(\mathbb{N})$ devient un espace vectoriel normé. Nous allons montrer que c'est un espace de Banach.

**Remarque :** Nous notons ici $(x(k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. En effet, une suite n'est finalement rien d'autre qu'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. De plus, cette notation s'avère être plus pratique dans la démonstration ci-dessous où nous devons considérer des suites dans $\ell_\infty$, qui sont donc des suites de suites.

**Proposition 3.14**

L'espace vectoriel normé $(\ell_\infty, \| \cdot \|_\infty)$ est complet.

*Démonstration.* Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\ell_\infty$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n := (x_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et nous souhaitons démontrer qu'elle converge.
Fixons $k \in \mathbb{N}$ (la $k$-ième coordonnée). La suite $(x_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et elle vérifie :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad |x_n(k) - x_m(k)| \leq \sup\{|x_n(k) - x_m(k)| \mid k \in \mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, on peut en déduire assez simplement que $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, nous savons alors que la suite $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; Notons $x(k)$ sa limite.
On obtient ainsi un candidat pour la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $x := (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$. Pour conclure, nous devons montrer que $x \in \ell_\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\|_\infty = 0$.
Commençons par montrer que $x \in \ell_\infty$ : Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad [n, m \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\|_\infty \leq 1] .$$

Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|x_n(k) - x_{n_0}(k)| \leq 1$. On passe alors à la limite $n \to +\infty$ et on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x(k) - x_{n_0}(k)| \leq 1.$$

Puis, en prenant maintenant la borne supérieure sur $k \in \mathbb{N}$ nous en déduisons que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k) - x_{n_0}(k)| \leq 1,$$

c'est-à-dire $\|x - x_{n_0}\|_\infty \leq 1$ et ainsi $x \in \ell_\infty$.
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\|_\infty = 0$ on réalise un raisonnement parfaitement similaire : Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad [n, m \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon] .$$

On a alors pour tout $n, m \geq n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_n(k) - x_m(k)| \leq \varepsilon$, et on passe à la limite lorsque $m \to +\infty$ pour obtenir

$$\forall n \geq n_0,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad |x(k) - x_n(k)| \leq \varepsilon.$$

Un simple passage à la borne supérieure sur $k$ permet de conclure :

$$\forall n \geq n_0, \quad \|x - x_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

□

*Pour aller plus loin :* Pour $p \in [1, \infty[$, $\ell_p(\mathbb{N})$ est l'espace vectoriel des suites $p$-sommables :

$$\ell_p(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Cet ensemble devient un espace vectoriel normé lorsqu'il est muni de la norme $p$ :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p, \quad \|x\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

## 4 Théorème du point fixe

**Définition 3.15: Application contractante.**

On dit qu'une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés est *contractante* si elle est $k$-lipschitzienne avec $k < 1$, i.e.

$$\exists k \in [0,1[, \ \forall x,y \in E, \quad \|f(x)-f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E.$$

Le résultat ci-dessous est également attribué au mathématicien français Émile Picard.

**Théorème 3.16: Théorème du point fixe de Banach (1920).** ♥

Soient $E$ un espace vectoriel normé et $K$ un sous-ensemble complet de $E$. Si $f : K \to K$ est contractante, alors l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution $x_0$ dans $K$.
De plus, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $x_0$.

*Démonstration.* La démonstration s'articule en deux étapes :

*Preuve de l'unicité.* L'existence étant (provisoirement) admise, prouvons que le point fixe est nécessairement unique. On utilise un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe deux éléments $x \neq y \in K$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. L'application $f$ étant contractante sur $K$, il existe $k \in [0,1[$ tel que :

$$\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|,$$

ce qui est absurde, puisque $k < 1$.

*Preuve de l'existence.* On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Nous allons démontrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Pour cela, nous utilisons principalement le fait que $f$ est $k$-lipschitzienne avec $k < 1$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\|u_{n+1}-u_n\| = \|f(u_n)-f(u_{n-1})\| \leq k\|u_n-u_{n-1}\|.$$

On montre alors facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_{n+1}-u_n\| \leq k^n\|u_1-u_0\|.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Un calcul direct montre que :

$$\begin{aligned}
\|u_{n+p}-u_n\| &\leq \|u_{n+p}-u_{n+p-1}\| + \|u_{n+p-1}-u_{n+p-2}\| \ldots + \|u_{n+1}-u_n\| \\
&\leq k^{n+p-1}\|u_1-u_0\| + k^{n+p-2}\|u_1-u_0\| + \ldots + k^n\|u_1-u_0\| \\
&= k^n \, \|u_1-u_0\| \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i\right) \\
&= k^n \, \|u_1-u_0\| \, \frac{1-k^p}{1-k}.
\end{aligned}$$

Comme $k < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n,p\to+\infty} \|u_{n+p}-u_n\| = 0$, ce qui implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Enfin, puisque $K$ est complet, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x_0 \in K$. Mais par continuité de $f$, on peut passer à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient $x_0 = f(x_0)$, ce qu'il fallait démontrer. □

# 5 Séries dans un espace de Banach

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Banach $E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

On appelle série de terme général $x_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on la note $\sum x_n$.

**Définition 3.17: Série convergente.**

On dit que la ***série*** $\sum x_n$ ***converge*** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $E$.

On note alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sa limite et on l'appelle somme de la série.

Dans les cours de "séries numériques" et "Suites et séries de fonctions", vous avez déjà étudié des séries dans des espaces de Banach. Par exemple, vous avez certainement démontré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge vers $e^x$. Dans la pratique, on commencera très souvent par regarder si la série est convergente dans un sens plus fort :

**Définition 3.18: Série absolument convergente.**

On dit que la série $\sum x_n$ est ***absolument convergente*** si la série $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}_+$.

**Proposition 3.19**

Dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente.

*Démonstration.* Soit $\sum x_n$ une série dans un espace de Banach $E$. On suppose que $\sum x_n$ est absolument convergente. Nous allons montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n := \sum_{i=0}^n x_i$, est une suite de Cauchy dans $E$. Puisque $E$ est complet, cela impliquera que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, i.e. que la série $\sum x_n$ est convergente. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum \|x_n\|$ converge, la suite

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \|x_i\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq q \geq N_0$, alors

$$\left|\sum_{i=0}^{p} \|x_i\| - \sum_{i=0}^{q} \|x_i\|\right| \leq \varepsilon \implies \sum_{i=q+1}^{p} \|x_i\| \leq \varepsilon.$$

On conclut enfin grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\|\sum_{i=0}^{p} x_i - \sum_{i=0}^{q} x_i\| = \|\sum_{i=q+1}^{p} x_i\| \leq \sum_{i=q+1}^{p} \|x_i\| \leq \varepsilon.$$

□

**Remarque :** La réciproque est fausse. En effet, dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

**Exemple :** La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Dans le théorème suivant, $\mathrm{GL}(E)$ désigne le sous-ensemble de $\mathrm{L}(E)$ formé par les isomorphismes (applications linéaires continues, bijectives, de réciproques continues) de $E$ dans $E$. Autrement dit, $\mathrm{GL}(E) = \mathrm{Isom}(E, E)$. Comme pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, G et L sont les premières lettres de "groupe linéaire" et font référence au fait que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe. On dit souvent que ***u est inversible*** si $u \in \mathrm{GL}(E)$, et $u^{-1}$ est alors l'inverse de $u$. De plus, dans la suite, si $u \in \mathrm{L}(E)$, on utilisera la notation suivante : $u^n = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ fois}}$.

**Théorème 3.20**

Soient $E$ un espace de Banach et $u \in \mathrm{L}(E)$. Si $|||\mathrm{Id}_E - u||| < 1$ alors $u \in \mathrm{GL}(E)$ et son inverse est la somme de la série $\sum(\mathrm{Id}_E - u)^n$.

*Démonstration.* L'hypothèse $|||\mathrm{Id}_E - u||| < 1$ assure que la série $\sum(\mathrm{Id}_E - u)^n$ converge absolument. En effet

$$|||(\mathrm{Id}_E - u)^n||| \leq |||\mathrm{Id}_E - u|||^n,$$

et la série de terme générale $|||\mathrm{Id}_E - u|||^n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $\frac{1}{1 - |||\mathrm{Id}_E - u|||}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |||(\mathrm{Id}_E - u)^n|||$ converge également. Puisque $\mathrm{L}(E)$ est un espace complet, la série $\sum(\mathrm{Id}_E - u)^n$ converge et on note

$$T := \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{Id}_E - u)^n \in \mathrm{L}(E).$$

Mais alors un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
u \circ \left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) &= (\mathrm{Id}_E - (\mathrm{Id}_E - u)) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) \\
&= \mathrm{Id}_E \circ \left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) - (\mathrm{Id}_E - u) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^{k+1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) \\
&= (\mathrm{Id}_E - u)^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k\right) - (\mathrm{Id}_E - u)^{n+1} \\
&= \mathrm{Id}_E - (\mathrm{Id}_E - u)^{n+1}
\end{aligned}$$

Or, puisque $|||\mathrm{Id}_E - u||| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} \left|\left|\left|(\mathrm{Id}_E - u)^{n+1}\right|\right|\right| = 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{Id}_E - u)^{n+1} = 0$. Ainsi, on passe à la limite dans l'égalité ci-dessus et on obtient

$$u \circ T = \mathrm{Id}_E .$$

Enfin, on peut réaliser le même raisonnement pour montrer que $T \circ u = \mathrm{Id}_E$. Une autre manière d'obtenir ce résultat est d'affirmer que $u$ commute avec toute puissance de $u$ et par conséquent

$$u \circ \left( \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k \right) = \left( \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id}_E - u)^k \right) \circ u$$

pour tout entier naturel $n$, et ainsi par passage à la limite $T \circ u = u \circ T = \mathrm{Id}_E$. Autrement dit, $u$ est inversible et son inverse est $T$. □

**Corollaire 3.21**

L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathrm{L}(E)$.

*Démonstration.* Soit $T \in \mathrm{GL}(E)$. On pose $r := \frac{1}{|||T^{-1}|||}$. On va démontrer que $\mathrm{B}(T, r) \subset \mathrm{GL}(E)$. Soit $u \in \mathrm{B}(T, r)$. Alors par un calcul direct on a

$$|||T^{-1}u - \mathrm{Id}_E||| = |||T^{-1}u - T^{-1} \circ T||| = |||T^{-1}(u - T)||| \leq |||T^{-1}|||\ |||u - T||| < |||T^{-1}|||r = 1.$$

D'après le théorème précédent, $T^{-1}u$ est inversible, ce qui implique que $u$ est inversible. □

A titre d'exemple, nous allons étudier une série particulière dans l'espace de Banach $(\mathrm{L}(E), |||\cdot|||)$ :

**Définition 3.22: Exponentielle d'endomorphismes.**

Si $E$ est un espace de Banach et si $u \in \mathrm{L}(E)$ alors la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ est absolument convergente et donc convergente.
On note $\exp u$ sa limite, et on l'appelle ***l'exponentielle de l'endomorphisme $u$.***

Le fait que la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ est absolument convergente se vérifie de la manière suivante. Si $k \in \mathbb{N}$ alors

$$\left|\left|\left| \frac{u^k}{k!} \right|\right|\right| = \frac{|||u^k|||}{k!} \leq \frac{|||u|||^k}{k!},$$

et la série de terme générale $\frac{|||u|||^k}{k!}$ converge vers $\exp |||u|||$. Donc la série $\sum \left|\left|\left| \frac{u^k}{k!} \right|\right|\right|$ est également convergente (par comparaison de séries à termes positifs).

**Proposition 3.23: Quelques propriétés de l'exponentielle d'endomorphismes.**

Soient $E$ un espace de Banach et $u \in \mathrm{L}(E)$.

($i$) $\exp(\mathrm{Id}_E) = \exp(1)\,\mathrm{Id}_E$ ;

($ii$) $|||\exp(u)||| \leq \exp(|||u|||)$ ;

($iii$) Si $u$ et $v$ commutent alors $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v)$ ;

($iv$) $\exp(u)$ est inversible d'inverse $\exp(-u)$ ;

($v$) L'application $u \in \mathrm{L}(E) \mapsto \exp(u) \in \mathrm{GL}(E)$ est continue.

La démonstration de cette proposition sera effectuée en T.D.

De la même manière, on peut définir l'exponentielle d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme suit (à noter que le produit matriciel remplace la composition d'endomorphisme).

**Définition 3.24: Exponentielle de matrices.**

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors la série $\sum \frac{M^k}{k!}$ est absolument convergente et donc convergente. On note $\exp M$ sa limite, et on l'appelle ***l'exponentielle de la matrice*** $u$**.**

Les propriétés de l'exponentielle de matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont similaire à celles de l'exponentielle d'endomorphismes ci-dessus. Pour terminer, donnons un exemple concret de calcul de $\exp M$.

**Exemple :** Si $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ alors $\exp D = \mathrm{Diag}(e^{d_1}, \ldots, e^{d_n})$. Puis si $M$ est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = P^{-1}DP$. On peut montrer alors que $\exp M = P^{-1} \exp DP$, ce qui permet de calculer simplement l'exponentielle de matrices diagonalisables.

# 6 Complété d'un evn

*Pour aller plus loin :* La construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ produit finalement un ensemble complet $\mathbb{R}$ qui est tel que $\mathbb{Q}$ peut être identifié comme un sous-espace dense de $\mathbb{R}$. Cette construction est en fait plus générale, comme le montre le théorème ci-dessous.

**Théorème 3.25**

Si $E$ est un espace vectoriel normé, alors il existe un espace de Banach $\widetilde{E}$ et une application linéaire $j : E \to \widetilde{E}$ telle que :

- $j(E)$ est dense dans $\widetilde{E}$ ;
- $j$ est une isométrie, i.e, $\forall x, y \in E$, $\|j(x) - j(y)\|_{\widetilde{E}} = \|x - y\|_E$.

L'ensemble $\widetilde{E}$ est unique à isométrie près, c'est-à-dire que si $\widetilde{E}'$ et $j' : E \to \widetilde{E}'$ vérifient les propriétés ci-dessus, alors il existe une isométrie linéaire surjective $I : \widetilde{E} \to \widetilde{E}'$ telle que $j' = I \circ j$.

Le théorème ci-dessus est admis.

**Définition 3.26: Complété d'un espace vectoriel normé.**

Si $E$ est un espace vectoriel normé, alors l'espace de Banach $\widetilde{E}$ donné par le théorème ci-dessus est appelé ***le complété de*** $E$.

**Exemples :** $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$ et $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est le complété de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ où

$$c_0 := \left\{ (x(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \to +\infty} x(n) = 0 \right\}$$
$$c_{00} := \left\{ (x(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x(n) = 0 \right\}.$$

56

# Chapitre 4

# Connexité

**Motivation :** L'idée de la connexité est de donner une définition rigoureuse au concept

"être d'un seul morceau".

Ce concept peut vous faire penser à la continuité des fonctions réelles, avec par exemple la phrase classique : "une fonction est continue si on peut en tracer son graphe sans lever le crayon (autrement dit en un seul trait → le graphe est en un seul morceau)". Cette phrase reflète une propriété importante : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. On cherche donc une généralisation naturelle des intervalles, que l'on appellera parties connexes, conçue de manière à ce que les parties connexes de $\mathbb{R}$ soient exactement ses intervalles, et destinée à parvenir à un résultat du type :

"l'image d'une partie connexe par une fonction continue est une partie connexe".

L'une des définitions possibles de la connexité s'inspire fortement de la discussion ci-dessus : $C$ est connexe si toute fonction continue sur $C$ et à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante. En fait, il s'agit plutôt d'une caractérisation fonctionnelle, d'où la question

Question :

*Quelle définition (intrinsèque) pour la notion de connexité ?*

Nous aborderons également une autre notion de connexité, plus forte que celle mentionnée ci-dessus, appelée connexité par arcs. Heuristiquement, une partie $C$ d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs si on peut relier chaque couple de points $(x, y) \in C^2$ par un chemin continue à valeurs dans $C$.

La connexité possède de nombreuses applications (nous en présenterons quelques-unes, notamment au calcul différentiel). Par exemple, la connexité est un outil qui permet "des passages du local au global" : Étant donné une propriété $(P)$, comment montrer que tous les points de $E$ vérifient cette propriété ? Une façon de procéder, lorsque l'espace est connexe, est de montrer que le sous-ensemble des éléments vérifiant $(P)$ est à la fois ouvert et fermé (on peut mentionner le théorème global de Cauchy-Lipschitz). Enfin, la connexité est également une notion qui permet de classifier les objets topologiques.

Historiquement, la connexité fut définie par G. Cantor sur la droite réelle (1883), même si la notion dans son principe fut précédemment discutée par B. Riemann (1851). La définition moderne dans l'espace euclidien $n$-dimensionnel est due à C. Jordan (1893), puis à N. J. Lennes qui la généralisa ensuite (1906 puis 1911), avant la systématisation réalisée par F. Hausdorff (1914).

# 1 Parties connexes

**Définition 4.1: Parties connexes.**

Une partie $A$ de $E$ est dite ***connexe*** si elle vérifie l'une des deux définitions équivalentes suivantes :

$(i)$ Il n'existe pas de recouvrement de $A$ en deux ouverts disjoints non vides de $A$.

$$\begin{cases} O_1 \text{ et } O_2 \text{ ouverts de } A \\ A = O_1 \cup O_2 \\ O_1 \cap O_2 = \emptyset \end{cases} \implies A = O_1 \text{ ou } A = O_2.$$

$(ii)$ Il n'existe pas de recouvrement de $A$ en deux fermés disjoints non vides de $A$.

$$\begin{cases} F_1 \text{ et } F_2 \text{ fermés de } A \\ A = F_1 \cup F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \emptyset \end{cases} \implies A = F_1 \text{ ou } A = F_2.$$

Dans le cas où $A = E$, on dit que $E$ est un ***espace connexe***.

Dans la définition ci-dessus, nous employons bien les termes "ouverts de $A$" et "fermés de $A$". Rappelons les règles de la topologie induite. On dit que $O$ est un ouvert de $A$ si c'est la trace sur $A$ d'un ouvert de $E$, c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert $O'$ de $E$ avec $A$ : $O = O' \cap A$. De même, $F$ est un fermé de $A$ s'il existe un fermé $F'$ de $E$ tel que $F = F' \cap A$. On peut donc reformuler les définitions ci-dessus en termes d'ouverts et fermés de $E$ comme suit : $A$ est une partie connexe de $E$ si et seulement si

$$\begin{cases} O_1 \text{ et } O_2 \text{ ouverts de } E \\ A \subset O_1 \cup O_2 \\ O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset \end{cases} \implies A \subset O_1 \text{ ou } A \subset O_2$$

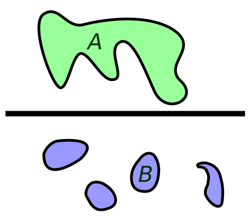
si et seulement si

$$\begin{cases} F_1 \text{ et } F_2 \text{ fermés de } E \\ A \subset F_1 \cup F_2 \\ F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset \end{cases} \implies A \subset F_1 \text{ ou } A \subset F_2.$$

**Remarque :** Si $A = O_1 \cup O_2$ avec $O_1$ et $O_2$ ouverts disjoints de $A$, alors $O_1 = A \setminus O_2$ et $O_2 = A \setminus O_1$ sont des fermés disjoints de $A$ (qui recouvrent $A$).

**Exemples :** Il est assez facile d'observer que l'ensemble vide et les singletons sont toujours des parties connexes de $E$. On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}$. Alors l'ensemble $A = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ n'est pas un ensemble connexe. En effet, $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ sont deux fermés de $A$, ils recouvrent $A$, et ne s'intersectent pas. De même, $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{Q} \subset ]-\infty, \sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}, +\infty[$ est union de deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}$. En revanche, nous allons montrer que les intervalles sont des parties connexes de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $A$ dessiné à droite est connexe alors que l'ensemble $B$ n'est l'est pas.



**Théorème 4.2**

L'intervalle $[0,1]$ est un connexe de $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $[0,1]$ n'est pas connexe. Il existe donc deux ouverts non vides de $[0,1]$, disons $O_1$ et $O_2$, tels que $[0,1] = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Quitte à inverser les rôles, nous pouvons supposer que $1 \in O_2$. Puisque $O_1$ est un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$, il admet une borne supérieure :

$$\text{Posons } s := \sup O_1.$$

Clairement $0 \leq s \leq 1$. De plus, le fait que $O_2$ soit un ouvert de $[0,1]$ tel que $1 \in O_2$ implique l'existence de $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(1,r) \cap [0,1] \subset O_2$. En d'autres termes, $]1-r,1] \subset O_2$, ce qui justifie que $s \leq 1-r$ et donc que $s < 1$.
D'un autre côté, nous savons que $O_1 = [0,1] \backslash O_2$ et que $O_2$ est un ouvert de $[0,1]$. Par conséquent $O_1$ est un fermé de $A$. Or, par la caractérisation de la borne supérieure ($\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in O_1$, $s \geq x \geq s-\varepsilon$), $s$ est limite d'une suite d'éléments de $O_1$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, prendre $x_n \in E$ tel que $s \geq x_n \geq s - 1/2^n$). Nous en déduisons que $s \in O_1$. Mais $O_1$ est également un ouvert de $[0,1]$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $s+\delta \leq 1$ et $]s-\delta, s+\delta[ = B(s,\delta) \cap [0,1] \subset O_1$. Nous obtenons alors que $s + \frac{\delta}{2} \in O_1$, ce qui contredit la définition de $s$. □

En fait, les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. Ce résultat pourrait être démontré "à la main" dès maintenant, mais non préférons emprunter un chemin de preuve plus court qui nécessite d'autres notions (introduites un peu plus tard dans ce chapitre). Nous allons maintenant démontrer une série de propriétés sur la connexité, à commencer par la caractérisation ci-dessous.

**Proposition 4.3**

Une partie $A$ dans $E$ est connexe si et seulement si les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés dans $A$ sont $A$ et $\emptyset$.

*Démonstration.* Supposons que $A$ est un ensemble connexe. Si $S \subset A$ est à la fois ouvert et fermé dans $A$, alors on peut écrire que $A = S \cup (A \setminus S)$ qui est un recouvrement de $A$ en deux ouverts (et fermés !) disjoints. Par conséquent $S = A$ ou $A \setminus S = A$, i.e. $S = \emptyset$.
Réciproquement, supposons que les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de $A$ soient $A$ et $\emptyset$. Soient alors $O_1$, $O_2$ deux ouverts de $A$ tels que $A = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Ceci implique que $O_1 = A \setminus O_2$, et donc $O_1$ est un fermé de $A$ comme complémentaire d'un ouvert de $A$. Ainsi $O_1$ est à la fois ouvert et fermé dans $A$, et donc $O_1 = A$ ou $O_1 = \emptyset$. Le second cas implique que $O_2 = A$, ce qui termine la démonstration. □

**Proposition 4.4: Caractérisation de la connexité via la continuité.**

Soit $A$ une partie de $E$. Alors $A$ est connexe si et seulement si toute application continue $f : A \to \{0,1\}$ est constante.

Pour démontrer proprement cette proposition, il faut être conscient que l'on munit $\{0,1\}$ de la topologie induite par l'espace normé $\mathbb{R}$ (voir page 14). Ainsi le sous-ensemble $\{0\}$ est à la fois ouvert dans $\{0,1\}$ (car on peut écrire par exemple $\{0\} = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \cap \{0,1\})$ et fermé dans $\{0,1\}$ (car on peut écrire par exemple $\{0\} = \{0\} \cap \{0,1\}$). De même pour le sous-ensemble $\{1\}$.

*Démonstration.* " $\Longrightarrow$ " : Soit $f : A \to \{0,1\}$ une application continue. On pose $F_0 := f^{-1}(\{0\})$ et $F_1 := f^{-1}(\{1\})$. D'après la discussion ci-dessus, $F_0$ est un sous-ensemble fermé de $A$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue. De même pour $F_1$. De plus, il est facile de voir que $A = F_0 \cup F_1$ et clairement $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Puisque $A$ est connexe, on en déduit que $A = F_0$ ou alors que $A = F_1$, ce qui implique que $f$ est constante.

" $\Longleftarrow$ " : Soit $O_1$ et $O_2$ deux ouverts disjoints de $A$ tels que $A = O_1 \cup O_2$. On considère la fonction $f : A \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$\forall x \in A, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in O_1 \\ 0 & \text{si } x \in O_2. \end{cases}$$

Observez que $f^{-1}(\{0,1\}) = A$, $f^{-1}(\{0\}) = O_2$, $f^{-1}(\{1\}) = O_1$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Par conséquent l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ est un ouvert de $A$, et donc $f$ est continue. Par hypothèse, $f$ doit alors être constante, c'est-à-dire $A = O_1$ ou alors $A = O_2$. $\square$

Le corollaire ci-dessous est très utile pour démontrer qu'une partie est connexe.

**Corollaire 4.5**

Soient $E, F$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue. Si $A$ est une partie connexe de $E$, alors $f(A)$ est une partie connexe de $F$.

*Démonstration.* Nous allons appliquer la proposition précédente : Soit $h : f(A) \to \{0,1\}$ une application continue. Alors $h \circ f : A \to \{0,1\}$ est également continue par composition de deux telles fonctions. Or $A$ est connexe par hypothèse, donc $h \circ f$ est constante, ce qui implique également que $h$ doit être constante. $\square$

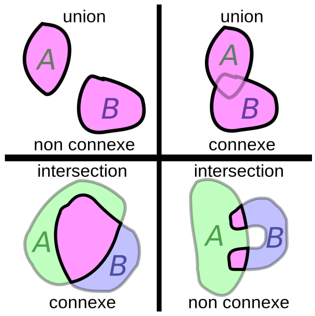
⚠ L'image réciproque d'un connexe par une application continue n'est pas nécessairement un connexe. Par exemple $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 1 \in \mathbb{R}$ est continue, nous avons démontré que $[0;1]$ est connexe, mais pour autant $f^{-1}([0,1]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

**Proposition 4.6**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de $E$. Si pour tous $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

*Démonstration.* Nous allons utiliser la caractérisation de la connexité via la continuité, c'est-à-dire la Proposition 4.4. Soit $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to \{0,1\}$ une application continue. La restriction $f\restriction_{A_i} : A_i \to \{0,1\}$ est une application continue sur un connexe, donc elle doit être constante. Notons $c_i \in \{0,1\}$ cette constante. Nous allons montrer que $c_i = c_j$ pour tous $i \neq j$, ce qui impliquera que $f$ est constante sur $\bigcup_{i \in I} A_i$, et donc que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe. Pour $i \neq j \in I$ fixé, il existe par hypothèse $x \in A_i \cap A_j$. Comme $f(A_i) = \{c_i\}$, on a $f(x) = c_i$ car $x \in A_i$. De même $f(A_j) = \{c_j\}$ et donc $f(x) = c_j$ car $x \in A_j$. Ainsi $c_i = c_j$, ce qui termine la démonstration. $\square$

⚠ Sans l'hypothèse sur l'intersection, la proposition précédente est fausse. De plus l'intersection de deux parties connexes n'est pas nécessairement connexe.




**Remarque :** Remarquez que la proposition précédente s'applique lorsque $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Il y a d'autres hypothèses qui assurent qu'une union d'ensembles connexes est connexe. Par exemple :

- Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties connexes de $E$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est connexe.

Terminons avec la proposition ci-dessous que sera démontrée en T.D.

**Proposition 4.7**

Si $A$ est une partie connexe de $E$ et si $B$ est une partie telle que $A \subset B \subset \overline{A}$, alors $B$ est connexe également.

## 2 Connexité par arcs

Soit $A$ une partie de $E$.

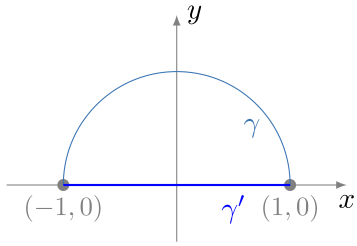
**Définition 4.8: Notion de chemin.**

On appelle ***chemin*** dans $A$ toute application continue $\gamma : [a, b] \to A$ où $a < b \in \mathbb{R}$.
On dit alors que $\gamma$ est un chemin qui joint $x = \gamma(a)$ à $y = \gamma(b)$, et l'image $\gamma([a, b])$ du chemin s'appelle un ***arc***.

**Exemple :** Dans l'espace $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, l'application

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \big(\cos(\pi t), \sin(\pi t)\big) \in \mathbb{R}^2$$

est un chemin de $E$ qui joint $(1, 0)$ à $(-1, 0)$.
Un autre chemin joignant ces deux points est donné par $\gamma' : t \in [0, 1] \mapsto t(-1, 0) + (1 - t)(1, 0)$.




**Remarque :** Dans la définition de chemin, on peut toujours supposer que $[a, b] = [0, 1]$ par composition avec l'homéomorphisme $t \in [a, b] \mapsto \frac{t-a}{b-a} \in [0, 1]$.

**Définition 4.9: Une relation d'équivalence.**

Pour $A \subset E$, on peut définir une relation d'équivalence sur $A$ comme suit :

$$\forall x, y \in A, \quad x \underset{A}{\sim} y \iff \text{Il existe un chemin dans } A \text{ reliant } x \text{ à } y.$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

- *Réflexivité :* Le chemin constant $\gamma : t \in [0,1] \mapsto x \in A$ relie $x$ à lui-même, donc $x \underset{A}{\sim} x$.
- *Symétrie :* Si $\gamma_1 : [0,1] \to A$ est un chemin qui joint $x$ à $y$ (i.e. $x \underset{A}{\sim} y$), alors le chemin $\gamma_2 : [0,1] \to A$ donné par $\gamma_2(t) := \gamma_1(1-t)$ joint $y$ à $x$, et donc $y \underset{A}{\sim} x$.
- *Transitivité :* Supposons que $\gamma_1 : [0,1] \to A$ joint $x$ à $y$ et que $\gamma_2 : [0,1] \to A$ joint $y$ à $z$. Alors on peut définir un chemin reliant $x$ à $z$ comme suit :

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

**Définition 4.10: Connexité par arc.**

Un ensemble $A \subset E$ est ***connexe par arcs*** si pour tous $x, y \in A$, il existe un chemin $\gamma$ qui joint les points $x$ et $y$. Autrement dit, $A$ est connexe par arcs si pour tous $x, y \in A$ : $x \underset{A}{\sim} y$.

Rappelons que $A \subset E$ est convexe si

$$\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in A.$$

**Proposition 4.11:** ♥

(*i*) Si $A \subset E$ est convexe, alors $A$ est connexe par arc.

(*ii*) Si $A \subset E$ est connexe par arcs, alors $A$ est connexe.

*Démonstration.* (*i*) Soient $x \neq y \in A$ fixés, un chemin joignant les points $x$ et $y$ est donné par

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)x + ty.$$

Il est en effet facile de vérifier que cette application est lipschitzienne donc continue :

$$\forall t, t' \in [0,1], \quad \|f(t) - f(t')\| = \|(t-t')y - (t-t')x\| = |t-t'|\|x-y\|.$$

(*ii*) Soit $f : A \to \{0,1\}$ une application continue. Soient $x, y \in A$ arbitraires. Nous allons montrer que $f(x) = f(y)$ et donc que $f$ est constante. Il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue, donc constante car $[0,1]$ est connexe (voir le Théorème 4.2). Par conséquent $f \circ \gamma(a) = f \circ \gamma(b)$, c'est-à-dire $f(x) = f(y)$. L'application $f$ est donc constante, et $A$ est connexe d'après la Proposition 4.4. Si $A \subset E$ est connexe par arcs, alors $A$ est connexe. □

On retiendra donc que

$$\boxed{\textbf{Convexe} \implies \textbf{Connexe par arcs} \implies \textbf{Connexe.}}$$

**Remarque :** Bien que la réciproque de la proposition précédente soit fausse en toute généralité (cf. T.D.), la connexité par arcs est une notion très utile pour montrer qu'un ensemble est connexe, nous verrons des exemples. En revanche la situation est différente dans le cas des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, comme le montre le théorème ci-dessous.

**Théorème 4.12: Les parties connexes de $\mathbb{R}$.** ♥

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $A$ est un intervalle.

$(ii)$ $A$ est convexe.

$(iii)$ $A$ est connexe par arcs.

$(iv)$ $A$ est connexe.

*Démonstration.* "$(i) \implies (ii)$" : Cette implication découle simplement des définitions. En effet, supposons que $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, et considérons $x, y \in A$ et $\lambda \in [0,1]$. Quitte à inverser les rôles, on peut supposer que $x \leq y$. On a alors

$$x \leq x + (1-\lambda)(y-x) = \lambda x + (1-\lambda)y = y - \lambda(y-x) \leq y.$$

Puisque $x \in A$ et $y \in A$, nous en déduisons que $\lambda x + (1-\lambda)y$ par définition de "$A$ est un intervalle".

"$(ii) \implies (iii)$" et "$(iii) \implies (iv)$" sont contenues dans la Proposition 4.11.

"$(iv) \implies (i)$" : Montrons que si $A$ est connexe alors $A$ est un intervalle. Nous allons raisonner par la contraposée. Supposons donc que $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle. Alors il existe $x, y \in A$ et $z \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq z \leq y$ et $z \notin A$. En fait, puisque $z \notin A$, $x < z < y$. On a ainsi $A \subset ]-\infty, z[ \cup ]z, +\infty[$, et ces deux derniers intervalles sont des ouverts non vides et disjoints de $\mathbb{R}$. Puisque $x \in ]-\infty, z[ \cap A$ et $y \in ]z, +\infty[ \cap A$, on a $A \not\subset ]-\infty, z[$ et $A \not\subset ]z, +\infty[$, ce qui montre que $A$ n'est pas connexe. □

*Pour aller plus loin :* Il n'y a pas de caractérisation aussi simple des parties connexes de $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 2$. Leur structure peut être plus compliquée, nous verrons quelques exemples. En revanche nous avons le résultat suivant :

**Théorème 4.13**

Une partie ouverte $A$ d'un espace vectoriel normé $E$ est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

*Démonstration.* Admis. □

La proposition ci-dessous est évidente, nous laissons donc sa démonstration en exercice.

**Proposition 4.14**

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

# 3 Composantes connexes

**Définition 4.15: Une nouvelle relation d'équivalence.**

Pour $A \subset E$, on peut définir une relation d'équivalence sur $A$ comme suit :

$$\forall x, y \in A, \quad x \,\mathcal{R}_A\, y \iff \exists\, C \text{ une partie connexe de } A \text{ telle que } x \in C \text{ et } y \in C.$$

Montrons qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

- *Réflexivité :* Le singleton $\{x\}$ est une partie connexe de $A$ contenant $x$, d'où $x \,\mathcal{R}_A\, x$.
- *Symétrie :* Il est clair que si $x \,\mathcal{R}_A\, y$ alors $y \,\mathcal{R}_A\, x$.
- *Transitivité :* Supposons que $x \,\mathcal{R}_A\, y$ et $y \,\mathcal{R}_A\, z$. Il existe donc une partie connexe $C_1$ contenant $x$ et $y$, et une partie connexe $C_2$ contenant $y$ et $z$. On pose alors $C := C_1 \cup C_2$. Puisque $y \in C_1 \cap C_2$, $C \neq \emptyset$ et donc $C$ est connexe d'après la Proposition 4.6. De plus, $C$ contient à la fois $x$ et $z$, donc $x \,\mathcal{R}_A\, z$.

**Définition 4.16: Composantes connexes.**

La classe d'équivalence d'un élément $x \in A$ pour la relation $\mathcal{R}_A$, c'est-à-dire l'ensemble

$$C(x) := \{z \in A \mid z \,\mathcal{R}_A\, x\},$$

est appelé ***la composante connexe*** de $x$ dans $A$. Les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}_A$ constituent donc ***les composantes connexes de $A$.***

**Proposition 4.17**

Soit $A \subset E$ et $x \in A$. Alors $C(x)$ est égal à l'union de tous les connexes contenant $x$. En particulier, $C(x)$ est connexe et fermé dans $A$.

*Démonstration.* Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties connexes de $A$ contenant $x$. Nous allons raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} z \in C(x) &\iff \exists\, C \text{ une partie connexe de } A \text{ telle que } x \in C \text{ et } z \in C \\ &\iff \exists\, C \in \mathcal{P} \text{ tel que } x, z \in C \\ &\iff z \in \bigcup_{B \in \mathcal{P}} B. \end{aligned}$$

Pour terminer, $C(x)$ est un connexe de $A$ en tant qu'union d'ensembles connexes dont l'intersection est non vide (Proposition 4.6). Par conséquent, $\overline{C(x)}$ est également connexe d'après la Proposition 4.7. On a donc $\overline{C(x)} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{P}} B = C(x)$, ce qui implique que $C(x) = \overline{C(x)}$ et donc que $C(x)$ est une fermé de $A$. □

**Remarques :**

- Si $A$ est connexe, alors il n'y a qu'une seule composante connexe puisque $\forall x \in A : C(x) = A$.
- La composante connexe $C(x)$ n'est pas nécessairement un ouvert de $A$. Par exemple si $A = \mathbb{Q}$ et $x = 0$, alors $C(x) = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $A$.
- Les composantes connexes de $A$ forment une partition de $A$ (c'est le cas des classes d'équivalences pour n'importe quelle relation d'équivalence).

**Exemple :** A votre avis, quelles sont les 5 composantes connexes de l'ensemble $A$ formé par les formes bleues ci-contre ?

Et de plus on a le résultat suivant :

**Proposition 4.18**

Si $A = \bigcup_{i \in I} C_i$ où les $C_i$ sont deux à deux disjoints, connexes, fermés non vides dans $A$ (respectivement ouverts non vides dans $A$), alors les $C_i$ sont les composantes connexes de $A$.

*Démonstration.* Il suffit de rédiger la preuve dans le cas où les $C_i$ sont des fermés de $A$ (si les $C_i$ sont des ouverts de $A$, alors $A \setminus C_i = \bigcup_{j \neq i} C_j$ et un ouvert de $A$, et donc les $C_i$ sont aussi des fermés de $A$). Nous allons démontrer que

$$\forall x \in A,\ \exists! i \in I, C(x) = C_i,$$

ce qui implique le résultat souhaité.

Soit $C(x)$ la composante connexe d'un point $x \in A$. Puisque la famille $(C_i)_{i \in I}$ forme une partition de $A$, il existe un unique $i \in I$ tel que $x \in C_i$. L'ensemble $C(x) \cup C_i$ est alors connexe d'après la Proposition 4.6. Puisque $C(x)$ est la plus grande composante connexe content $x$, on a nécessairement $C(x) = C(x) \cup C_i$ et donc $C_i \subset C(x)$. Il reste à montrer l'inclusion réciproque $C(x) \subset C_i$. Pour cela il suffit d'observer que le raisonnement précédent, ainsi que le fait que la la famille $(C_i)_{i \in I}$ forme une partition de $A$, implique que $C(x)$ est égal à la réunion des $C_j$ qu'il rencontre :

$$C(x) = \bigcup_{\substack{j \in I \\ C_j \cap C(x) \neq \emptyset}} C_j.$$

Or, $C(x)$ ne peut rencontrer plusieurs $C_j$ à la fois car sinon il se partagerait en une union de fermés disjoints et non vides, ce qui contredirait sa connexité. Ainsi il existe un seul $i \in I$ tel que $C(x) \cap C_i \neq \emptyset$ et en fait $C(x) = C_i$.

□

**Exemple :** Prenons $A = \mathbb{R}^*$. Clairement $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle et donc $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe. En revanche, nous pouvons écrire que $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$. Ces deux derniers intervalles constituent donc les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$. Par exemple $C(-1) = ]-\infty, 0[ = C(x)$ dès que $x < 0$, et $C(1) = ]0, +\infty[ = C(x)$ dès que $x > 0$.

# 4 Quelques exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans toute cette partie, on considère des sous-ensembles de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes, on pourra donc choisir celle qui nous arrange le mieux). Nous allons étudier le groupe linéaire d'ordre $n$ :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est inversible}\}.$$

Nous souhaitons déterminer les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Commençons avec les scalaires complexes.

**Lemme 4.19**

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est une application continue, alors l'application

$$F : t \in [0,1] \mapsto f(t)M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est continue.}$$

*Démonstration.* Il suffit d'observer que si $s, t \in [0,1]$ alors $\|F(s) - F(t)\| \leq |f(s) - f(t)| \, \|M\|$, puis d'utiliser la continuité de $f$. ☐

**Proposition 4.20: ♥**

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

*Démonstration.* Soit $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. L'application $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \det\big(zM + (1-z)N\big)$$

est polynomiale. De plus, elle est non nulle car $P(0) = \det(N) \neq 0$ et $P(1) = \det(M) \neq 0$. Elle s'annule donc sur un ensemble fini $S$. Comme $\mathbb{C} \setminus S$ est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus S$ tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$. Finalement, on définit $\Gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad \Gamma(t) = \gamma(t)M + (1 - \gamma(t))N.$$

Grâce au Lemme 4.19, l'application $\Gamma$ est continue comme somme de deux telles fonctions. De plus $\Gamma(0) = N$, $\Gamma(1) = M$ et par construction $\det(\Gamma(t)) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc $\Gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un chemin continu reliant $N$ à $M$. ☐

Le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un petit peu plus délicat...

**Proposition 4.21**

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes :

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}.$$

*Démonstration.* Puisque $M$ est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$, on a alors

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \, \cup \, \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}).$$

L'application det étant continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, les ensembles $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(]0, +\infty[)$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}(]-\infty, 0[)$ sont ouverts. Il suffit donc de montrer qu'ils sont connexes d'après la Proposition 4.18. De plus, $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ est l'image continue de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ via l'application $M \mapsto DM$, où $D$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ où $d_1 = -1$ et $d_i = 1$ si $i \geq 2$. Il suffit donc d'établir la connexité de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, puisque $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sera alors également connexe comme image d'un connexe par une application continue.

Soit $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. On définit la matrice diagonale $D := \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, \det(M))$. On a alors

$$\det(MD^{-1}) = \det(M)\det(D^{-1}) = \det(M)\det(D)^{-1} = \det(M)\det(M)^{-1} = 1.$$

Ainsi $MD^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

**Fait :** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est engendré par les matrices de transvections, i.e. les matrices de la forme* $T(a) := I_n + aE_{i,j}$*, avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $i \neq j$*, où* $E_{i,j}$ *est la matrice avec des zéros partout, sauf le terme situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.*

Il existe donc des matrices de transvections $T(\lambda_1), \dots, T(\lambda_r) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ telles que $MD^{-1} = T(\lambda_1) \cdots T(\lambda_r)$ ou encore,

$$M = T(\lambda_1) \cdots T(\lambda_r) D.$$

On définit alors $\gamma_1 : [0,1] \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma_1(t) = T(t\lambda_1) \cdots T(t\lambda_r) D.$$

L'application $\gamma_1$ est continue et à valeurs dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ (simplement calculer le déterminant) et de plus $\gamma_1(0) = D$ et $\gamma_1(1) = M$. On peut donc relier $D \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ à $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ par un chemin continue. Pour conclure, on peut très facilement construire un chemin continue dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ qui relie $I_n$ à $D$ : $\gamma_2(t) = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, t\det(M) + (1-t))$. Au final, puisque "$\sim$" est une relation d'équivalence, il existe un chemin continue de $I_n$ vers $M$ pour tout $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ : $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. □

# 5 Quelques applications de la connexité

## 5.1 A l'analyse réelle

Un corollaire direct de la caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$ est le résultat très classique ci-dessous.

**Théorème 4.22: Le théorème des valeurs intermédiaires.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

**Remarque :** Une autre manière d'énoncer la conclusion, en utilisant la définition d'un intervalle, est la suivante : Si $a < b \in I$ et si $y$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

*Démonstration.* Le Théorème 4.12 assure que $I$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Puis l'image d'un connexe par une application continue est connexe d'après la Proposition 4.5. Ainsi $f(I)$ est également un connexe de $\mathbb{R}$, et donc c'est un intervalle de nouveau d'après le Théorème 4.12. □

**Corollaire 4.23: Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 1.**

Si $f : [a,b] \to [a,b]$ est une fonction continue, alors $f$ admet un point fixe, c'est-à-dire

$$\exists x \in [a,b], \quad f(x) = x.$$

*Démonstration.* Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. On sait que $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g$ s'annule en au moins un point sur [a,b], ce qui implique que $f$ admet au moins un point fixe. □

Nous nous intéressons maintenant à un résultat démontré par Gaston Darboux en 1875 qui étend le théorème des valeurs intermédiaires aux fonctions non nécessairement continues mais seulement dérivées de fonctions réelles.

**Théorème 4.24: Théorème de Darboux.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

*Démonstration du théorème de Darboux.* Posons $A := \{(x,y) \in I^2 \mid x < y\}$. Il est facile de vérifier que cet ensemble est convexe, donc il est en particulier connexe. Soit alors l'application $F : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Par continuité de $f$, si $(x_0, y_0) \in A$ alors

$$\lim_{A \ni (x,y) \to (x_0,y_0)} F(x,y) = F(x_0, y_0).$$

Donc $F$ est continue sur $A$. Par conséquent $B := F(A)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ comme image continue d'un connexe. Nous allons démontrer que

$$B \subset f'(I) \subset \overline{B}.$$

D'après la Proposition 4.7, ceci impliquera que $f'(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle.

- $B \subset f'(I)$ : Soit $F(x,y) \in B$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]x,y[$ tel que $f'(c) = F(x,y)$. C'est exactement dire que $F(x,y) \in f'(I)$.
- $f'(I) \subset \overline{B}$ : Soit $x_0 \in I$. Par définition, $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} F(x, x_0)$. En particulier,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x, x_0) \quad i.e. \quad f'(x_0) = \lim_{A \ni (x,x_0) \to (x_0,x_0)} F(x, x_0).$$

Ainsi $f'(x_0) \in \overline{B}$ en tant que limite d'une suite d'éléments de $B$.

□

## 5.2 A la classification topologique

Soient $A$ une partie d'un espace vectoriel normé $E$ et $B$ une partie d'un espace vectoriel normé $F$.

**Définition 4.25: Homéomorphisme.**

On dit qu'une fonction $f : A \to B$ est un ***homéomorphisme*** de $A$ dans $B$ si $f$ est continue, bijective, de réciproque $f^{-1} : B \to A$ continue.
On dit que $A$ et $B$ sont ***homéomorphe*** si il existe un homéomorphisme de $A$ dans $B$.

La notion de connexité peut parfois être utilisée pour démontrer que deux ensembles $A \subset E$ et $B \subset F$ ne sont pas homéomorphe. Nous allons présenter la méthode à travers un exemple.

**Proposition 4.26: ♥**

La droite $\mathbb{R}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, i.e., il n'existe pas d'application continue, bijective, à réciproque continue entre ces deux ensembles.

*Démonstration.* Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit un homéomorphisme. Notons $(x_0, y_0)$ l'unique antécédent de 0. Alors la restriction $f\restriction_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x_0,y_0)\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\} \to \mathbb{R}^*$ est un homéomorphisme également. Or, $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe car ce n'est pas un intervalle, et on peut facilement observer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ est connexe par arcs (donc connexe). C'est une contradiction car l'image d'un connexe par une application continue doit être connexe. □

En utilisant une méthode similaire, on peut également montrer que

"Deux intervalles de $\mathbb{R}$ de nature différente ne sont pas homéomorphes."

Par exemple que $A = [0, 1[$ n'est pas homéomorphe à $B = ]0, 1[$. En effet, remarquez que $A \setminus \{0\} = ]0, 1[$ est connexe alors que $B \setminus \{0\}$ n'est plus un intervalle, donc n'est plus connexe. Ainsi si $f$ était un homéomorphisme de $A$ sur $B$, $B \setminus \{O\}$ devrait être homéomorphe à $A \setminus \{0\}$, ce qui est impossible.

## 5.3 D'autres applications

*Pour aller plus loin :* La notion de connexité possède de nombreuses applications dans d'autres domaines des mathématiques. On peut mentionner son utilisation dans la démonstration de l'unicité globale du Théorème de Cauchy-Lipschitz (équations différentielles, Voir ici). On peut mentionner également son utilisation plus que récurrente en Analyse complexe (principe du maximum, principe du prolongement analytique, principe des zéros isolés, théorème de Runge, etc).

# Chapitre 5

# Calcul différentiel abstrait

**Motivation :** Arrivé au dernier chapitre de ce cours, vous devriez commencer à comprendre que l'une des idées principales est de généraliser des concepts, des résultats connus, à un contexte plus général : celui des espaces vectoriels normés. C'est à nouveau ce que nous allons développer ici. Vous connaissez déjà les notions importantes du calcul différentiel pour les fonctions de plusieurs variables, i.e. les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. En particulier, une notion centrale est celle de "fonction différentiable", qui généralise déjà la notion de "fonction dérivable" lorsque la variable est réelle. Grâce aux éléments introduits dans les chapitres précédents, nous allons être en mesure de définir mais surtout étudier une notion de différentiabilité pour les fonctions entre espaces vectoriels normés généraux. En fait, la généralisation est assez immédiate :

**Définition dans $\mathbb{R}^n$ :** *Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est **différentiable** en $a \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \textit{avec} \lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0.$$

**Définition dans un evn :** *Une application $f : E \to F$ est **différentiable** en $a \in E$ s'il existe une application linéaire **continue** $L \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que pour tout $h \in E$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|_E\,\varepsilon(h) \quad \textit{avec} \lim_{h \to 0_E} \varepsilon(h) = 0.$$

La seule différence est l'ajout de l'hypothèse de continuité sur $L$, puisqu'elle est automatique en dimension finie. Cette hypothèse supplémentaire semble assez naturelle pour conserver l'implication "différentiable $\implies$ continue". La principale nouveauté n'est donc pas la définition, mais plutôt l'utilisation de la notion de connexité qui permet de retrouver des résultats classiques comme : "Si une fonction $f : U \to F$ a une différentielle nulle sur un ouvert connexe $U$, alors $f$ est constante". Attention, tous les résultats de l'analyse réelle ne se généralisent pas nécessairement en dimensions supérieures (c'est le cas par exemple du théorème de Rolle ; cf T.D.).

Rappelons que le calcul différentiel (ou infinitésimal), co-inventé par Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716), est souvent considéré comme l'une des grandes découvertes de l'humanité. Il permet en particulier de formuler un grand nombre de lois de la physique et de la mécanique en termes d'équations différentielles (EDO) et aux dérivées partielles (EDP) (mécaniques des solides, des fluides, propagation de la chaleur, des ondes, etc). La résolution de ces équations permet de déduire des conséquences macroscopiques (météo, climat, déplacements des planètes, etc) et quantitatives des lois microscopiques de la physique. Le calcul différentiel permet aussi de traiter les problèmes d'optimisation : il s'agit de trouver le minimum (ou le maximum) d'une fonction numérique $f : X \to \mathbb{R}$ où $X$ peut être une partie d'un espace vectoriel normé.

# 1 Rappels de L2 : Notions de dérivées en plusieurs variables

Nous commençons ce chapitre par une série de rappels de l'année dernière. Dans toute cette partie, $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une fonction. On note également $(e_k)_{k=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Définition 5.1: Dérivées partielles.**

On dit que la ***$k$-ième dérivée partielle*** de $f$ existe au point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ si l'application

$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

(définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$) est dérivable en 0. On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) \in \mathbb{R}^m$ cette $k$-ième dérivée partielle, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t}.$$

En oubliant les notations peut-être un peu désagréables, cette définition est très simple : on considère toutes les variables comme constantes sauf une, et on dérive par rapport à cette variable.

**Remarques :**

1. Il ne faut pas perdre de vue que $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ est un élément de $\mathbb{R}^m$. En particulier, si la dérivée partielle de $f$ existe pour tout $a \in U$, on obtient une application $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} : U \to \mathbb{R}^m$, qu'on appelle bien entendu la $k$-ième dérivée partielle de $f$.

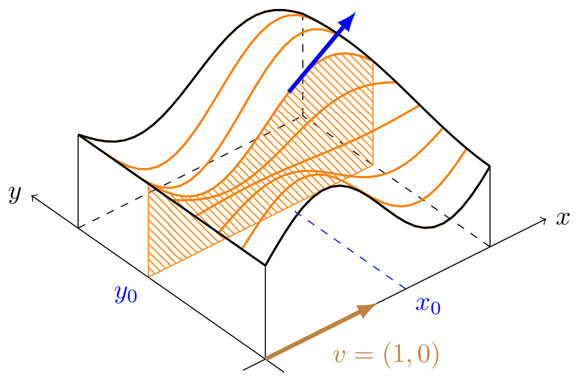
2. Si $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, les variables se notent en général $(x, y, z)$ et on écrit plutôt $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ à la place de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$.

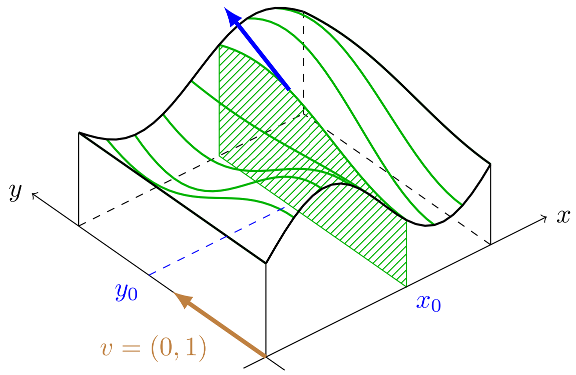
3. **Interprétation géométrique :** Pour une fonction d'une variable, la dérivée est la pente de la tangente au graphe de la fonction (le graphe étant alors une courbe). Pour une fonction de deux variables $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$, les dérivées partielles indiquent les pentes au graphe de $f$ selon certaines directions (le graphe étant ici une surface). Plus précisément :

   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente du graphe de $f$ en $(x_0, y_0)$ suivant la direction de l'axe $(Ox)$. En effet cette pente est celle de la tangente à la courbe $z = f(x, y_0)$ et est donnée par la dérivée de $x \mapsto f(x, y_0)$ en $x_0$, c'est donc bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente du graphe de $f$ en $(x_0, y_0)$ suivant la direction de l'axe $(Oy)$.

   Sur la figure de gauche, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ indique la pente de la tranche parallèle à l'axe $(Ox)$ (en orange). Sur la figure de droite, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ indique la pente de la tranche parallèle à l'axe $(Oy)$ (en vert).




**Exemple :** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on peut obtenir la dérivée partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ simplement en dérivant l'expression de $f$ par rapport à $x$, en considérant $y$ comme une constante. Un calcul direct montre alors que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

De même, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en dérivant l'expression de $f$ par rapport à $y$, en considérant $x$ comme une constante :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En revanche, comme $f$ est définie par morceau en $(0, 0)$, il faut revenir à la définition pour obtenir les dérivées partielles en $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f$ admet des dérivées partielles en $(0, 0)$. En revanche, il est intéressant de remarquer que $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$ puisque

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

L'exemple ci-dessus montre que l'étude des dérivées partielles ne répond pas à toutes nos attentes puisqu'une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être continue. L'existence des dérivées partielles en $(0,0)$ pour une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ assure que $f$ "paraît continue" tant qu'on se déplace le long de l'axes des abscisses ou des ordonnées. Dans l'exemple précédent, le problème vient du fait que ce n'est plus du tout le cas si on s'approche du point (0,0) en suivant par exemple la droite d'équation $x = y$. Ce problème peut être évité si au lieu de ne considérer que les dérivées partielles, c'est-à-dire les dérivées selon les directions données par les axes, on considère les dérivées selon toutes les directions possibles :

**Définition 5.2: Dérivées directionnelles.**

On dit que $f : U \to \mathbb{R}^m$ admet une ***dérivée en*** $a \in U$ ***suivant la direction*** $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si l'application $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ (définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$) est dérivable en 0. On note alors $D_v f(a) \in \mathbb{R}^m$ cette dérivée directionnelle, i.e.

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

**Remarque :** La $k$-ième dérivée partielle de $f$ en $a$ n'est rien d'autre que la dérivée directionnelle de $f$ en $a$ suivant la direction $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0 \ldots, 0)$. En d'autres termes : $D_{e_k} f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Malheureusement cette nouvelle définition ne résout pas notre problème, puisqu'une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans pour autant être continue en ce point. Considérons par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f$ admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ : $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \begin{cases} \frac{t^3 v_2^3}{t^2 v_1} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ t v_2 & \text{si } v_1 = 0 \end{cases} = 0.$$

En revanche, une nouvelle fois $f$ n'est pas continue en $0_{\mathbb{R}^2}$ :

$$\lim_{t \to 0} f(t^3, t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{t^3} = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

Il nous faut donc une notion encore plus forte pour espérer obtenir une meilleure généralisation de la notion de dérivabilité des fonctions de plusieurs variables. Pour cela, on va s'inspirer de la caractérisation de la dérivabilité via les développements limités. Rappelons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f$ admet un développement limité en $a$ à l'ordre 1, i.e. il existe $c \in \mathbb{R}$ ainsi qu'une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{R},\ f(a+h) = f(a) + ch + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Rappelons alors que $c = f'(a)$ et que l'application $h \in \mathbb{R} \mapsto ch \in \mathbb{R}$ est linéaire.

**Définition 5.3: Applications différentiables.**

On dit qu'une application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est ***différentiable*** en $a$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ainsi que $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que pour tout $h$ dans un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$ (tel que $a + h \in U$), on a

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \, \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0.$$

On note alors $\mathrm{d}f(a) := L$ qui est appelée ***la différentielle de $f$ en $a$***. Si $f$ est différentiable en tout point de $U$, on dit que $f$ est différentiable sur $U$.

**Remarques :** Dans la définition ci-dessus, on voit apparaître le terme $\|h\|$ sans pour autant préciser la norme choisie. Rappelons que le choix de la norme n'a aucune importance ici puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (Théorème 2.18). Ensuite, si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors $f : I \to \mathbb{R}$ est une application différentiable en $a \in I$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$ avec :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}f(a)(t) = f'(a)h.$$

La notion d'application différentiable est mieux adapté pour généraliser la notion de dérivabilité, comme le montre les relations ci-dessous :

- Si $f$ est différentiable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.
- Si $f$ est différentiable en $a$, alors elle est dérivable en $a$ suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on a $D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$
- En particulier, $D_{e_k} f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \mathrm{d}f(a)(e_k)$ et ainsi

$$\forall h = (h_1, \dots h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

- Toute combinaison linéaire d'application différentiable est une application différentiable.
- La $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sont différentiables, alors $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable avec $\mathrm{d}g \circ f(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$.

Le résultat suivant s'avère extrêmement utile en pratique.

**Théorème 5.4: Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$**

1. Si toutes les dérivées partielles de $f$ sont définies et continues au voisinage de $a \in U$, alors $f$ est différentiable en $a$.
2. Si toutes les dérivées partielles de $f$ sont définies et continues sur $U$, alors $f$ est différentiable sur $U$ et de plus $x \in U \mapsto \mathrm{d}f(x) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue.

Si $f$ vérifie le point 2. du théorème précédent, on dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.

**Remarque :** Ce n'est pas parce que $f$ est différentiable en $a$ que les dérivées partielles sont continues en $a$, même en dimension 1 ! Il y a des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en un point mais pour autant la dérivée n'est pas continue en ce point ; considérer par exemple $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$.

Nous terminons cette section avec le point de vue matriciel, qui permet bien souvent, en pratique, de simplifier les calculs.

**Définition 5.5: Vecteur gradient**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application admettant des dérivées partielles en un point $a \in U$. Le vecteur

$$\nabla f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

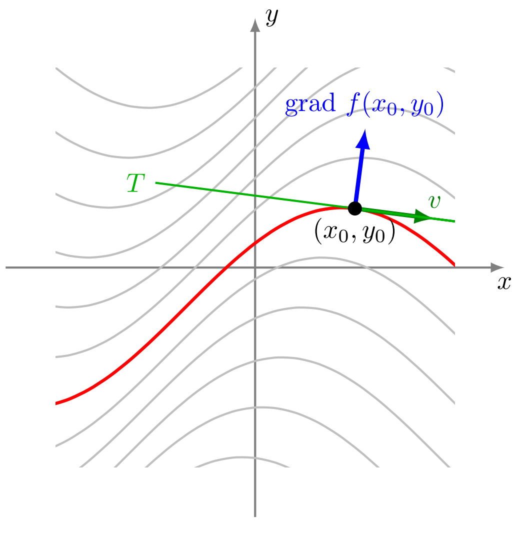
est appelé ***vecteur gradient*** de $f$ en $a$.

On peut alors retrouver facilement l'expression de la différentielle de $f$ en $a$ via le vecteur gradient et le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

**Interprétation du gradient :** *Le vecteur gradient indique la direction de plus grande "pente".*

Autrement dit, si le gradient d'une fonction est différent de zéro en un point $a$, la direction du gradient est la direction dans laquelle la fonction augmente le plus rapidement à partir de $a$. Pour illustrer plus facilement cette interprétation, prenons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Concrètement, vous pouvez imaginer que $f(x, y)$ représente l'altitude d'un point de coordonnées $(x, y)$ sur une carte. L'ensemble $\{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$ avec $k \in \mathbb{R}$ fixé est appelé ligne de niveau $k$ (c'est donc tous les points sur la carte ayant une altitude égale à $k$). Le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction qui maximise l'altitude, c'est-à-dire, en partant de $(x_0, y_0)$ de niveau $k$, il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ si l'on veut passer au niveau $k' > k$ le plus vite possible. Ainsi, en montagne, si vous voulez prendre la pente la plus dure, il faut suivre le gradient de la fonction altitude. Si vous voulez descendre le plus possible, il faut au contraire suivre la direction opposée. De plus, si vous voulez garder la même altitude, c'est-à-dire rester sur votre ligne de niveau, il faut alors suivre une direction orthogonale au gradient ("le gradient est orthogonal aux lignes de niveau").




On revient maintenant au cas d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$ où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De manière assez classique, on écrit $(f_i)_{i=1}^m$ les fonctions composantes de $f$. Chaque fonction $f_i$ va donc de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. En fait, pour retenir l'expression de la matrice jacobienne, il est plus simple d'écrire ces composantes en vecteur colonne, i.e.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}.$$

**Définition 5.6: Matrice jacobienne**

On suppose que chaque $f_i$ possède des dérivées partielles en $a \in U$. La matrice jacobienne de $f$ au point $a$ est la matrice :

$$\mathrm{Jac}(f)(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La matrice jacobienne d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ a donc $m$ lignes et $n$ colonnes. De plus, lorsque $f$ est différentiable en $a$, la matrice $\mathrm{Jac}(f)(a)$ n'est rien d'autre que la matrice de $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans les bases canoniques. Pour ne pas se tromper dans l'écriture de $\mathrm{Jac}(f)(a)$ il faut juste ne pas oublier d'écrire $f(a)$ comme un vecteur colonne.

La matrice jacobienne permet donc de retrouver l'expression de la différentielle assez simplement. En effet, pour $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{d}f(a)(h) \in \mathbb{R}^m$. Si on note les composantes de $\mathrm{d}f(a)(h)$ sous forme d'un vecteur colonne, noté $\mathrm{d}f(a)(h)^t$, alors il suffit d'appliquer le calcul matricel suivant :

$$\mathrm{d}f(a)(h)^t = \mathrm{Jac}(f)(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

En particulier, la formule de la différentielle d'une composition $\mathrm{d}g \circ f(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$ devient

$$\mathrm{Jac}(g \circ f)(a) = \mathrm{Jac}(g)(f(a)) \cdot \mathrm{Jac}(f)(a).$$

## 2 Différentielle abstraite et IAF

Nous allons maintenant considérer des fonctions entre deux espaces vectoriels normés $E$ et $F$. Plus précisément soit $f : U \to F$ où $U$ est un ouvert de $E$. Comme précisé dans l'introduction de ce chapitre, la définition ci-dessous n'a pas grand chose de nouveau, mis à part l'hypothèse de continuité sur $L$.

**Définition 5.7: Application différentiable.**

Soit $a \in U$. On dit qu'une application $f : U \to F$ est ***différentiable*** en $a$ s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathrm{L}(E, F)$ et $\varepsilon : E \to F$ tels que, pour tout $h$ dans un voisinage de $0_E$ (tel que $a + h \in U$), on a

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|_E\, \varepsilon(h) \quad \text{avec} \lim_{h \to 0_E} \varepsilon(h) = 0.$$

On note alors $\mathrm{d}f(a) := L$ qui est appelée ***la différentielle de $f$ en $a$***. Si $f$ est différentiable en tout point de $U$, on dit que $f$ est différentiable sur $U$.

**Remarques :**

1. De manière équivalente, $f$ est différentiable en $a$ s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathrm{L}(E,F)$ telle que
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ a+h\in U}} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$
2. Il est implicite dans la définition d'application différentiable que l'application $L \in \mathrm{L}(E,F)$ est unique. En effet, si $L_1$ et $L_2$ vérifie la définition de $f$ est différentiable en $a$, on a alors pour tout $h \in E$ :
$$\begin{aligned} L_1(h)-L_2(h) &= (f(a+h)-f(a)-\|h\|_E\,\varepsilon_1(h)) - (f(a+h)-f(a)-\|h\|_E\,\varepsilon_2(h)) \\ &= \|h\|_E\,(\varepsilon_1(h)-\varepsilon_2(h)) \end{aligned}$$
Soit alors $t>0$. On évalue l'égalité précédente en $th$ puis on fait tendre $t$ vers $0$ :
$$\begin{aligned} & L_1(th)-L_2(th) = \|th\|_E\,(\varepsilon_1(th)-\varepsilon_2(th)) \\ \Longrightarrow\ & t(L_1(h)-L_2(h)) = t\|h\|_E(\varepsilon_1(th)-\varepsilon_2(th)) \\ \Longrightarrow\ & L_1(h)-L_2(h) = \|h\|_E(\varepsilon_1(th)-\varepsilon_2(th)) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \\ \Longrightarrow\ & L_1(h) = L_2(h). \end{aligned}$$

□

**Exemple :** Si $T \in \mathrm{L}(E,F)$, alors $T$ est une application différentiable sur $E$ et pour tout $a \in E$,
$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}T(a)(h) = T(h).$$
En effet, $T(a+h) = T(a)+T(h)$, ce qui est la définition de $T$ différentiable en $a$ avec $\mathrm{d}T(x) = T \in \mathrm{L}(E,F)$ et $\varepsilon(h) = 0_F$, $\forall h \in E$.

Comme en dimension finie, on a les règles ci-dessous ; les preuves sont identiques et donc laisser en exercice.

- Si $f$ est différentiable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.
- Si $f : U \to F$ et $g : U \to F$ sont différentiables en $a \in U$, et si $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en $a$ avec
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a).$$
- Si $f : E \to F$ est différentiable $a$, et si $g : F \to G$ est différentiable en $f(a)$, alors $g\circ f : E \to G$ est différentiable en $a$ avec $\mathrm{d}g\circ f(a) = \mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)$.

**Définition 5.8: Application de classe $\mathcal{C}^1$.**

On dit qu'une application $f : U \to F$ ***est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$*** si $f$ est différentiable sur $U$ et si sa différentielle $\mathrm{d}f : x \in U \mapsto \mathrm{d}f(x) \in \mathrm{L}(E,F)$ est continue.

Le résultat suivant généralise l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle mais à valeurs vectorielles.

**Théorème 5.9**

Soient $F$ un espace vectoriel normé et $f : [a,b] \to F$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors :
$$\forall x,y \in [a,b], \quad \|f(x)-f(y)\|_F \le \sup\left\{\|f'(c)\|_F \mid c \in ]a,b[\right\}|x-y|$$

*Démonstration.* Notons $M := \sup\{\|f'(c)\|_F \mid c \in ]a,b[\}$. Si $M = +\infty$, alors l'inégalité est clairement vérifiée. On suppose donc que $M < +\infty$. Soient $\varepsilon > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < y < b$. Nous allons démontrer que

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq (M + \varepsilon)|x - y|.$$

Pour cela, nous considérons l'ensemble $S := \{t \in [x,y] \mid \|f(t) - f(x)\|_F \leq (M+\varepsilon)|t-x|\}$. Puisque la fonction

$$F : t \mapsto \|f(t) - f(x)\|_F - (M + \varepsilon)|t - x|$$

est continue sur $[x,y]$, $S = F^{-1}(] - \infty, 0])$ est un sous-ensemble fermé de $[x,y]$. De plus, $x \in S$ donc $S$ est non vide. On peut donc en considérer sa borne supérieure : $c := \sup(S)$. Remarquez que $c \in S$ puisque $S$ est fermé.

Montrons par l'absurde que $c = y$. Si $c < y$, alors par définition de la différentielle, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in [-\delta, \delta]$,

$$\|f(c+h) - f(c)\|_F \leq \|\mathrm{d}f(c)(h)\| + \varepsilon|h| = (\|f'(c)\|_F + \varepsilon)|h| \leq (M + \varepsilon)|h|.$$

Autrement dit, si $d = c + \delta$ alors $\|f(d) - f(c)\|_F \leq (M+\varepsilon)|d - c|$. Mais alors on a par inégalité triangulaire :

$$\|f(d)-f(x)\|_F \leq \|f(d)-f(c)\|_F+\|f(c)-f(x)\|_F \leq (M+\varepsilon)(d-c)+(M+\varepsilon)(c-x) = (M+\varepsilon)(d-x),$$

c'est-à-dire $d \in S$. Cela contredit la définition de $c$, et donc nécessairement $c = y$.

Pour conclure, comme le choix de $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous avons démontré que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < y < b$,

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq M|x - y|.$$

Par continuité de $f$, cette inégalité reste vraie pour $x = a$ et $y = b$, ce qui termine la démonstration. □

Nous en déduisons maintenant l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions vectorielles.

**Corollaire 5.10: Inégalité des accroissements finis.**

Soient $E, F$ des espaces vectoriels normés et $f : U \to F$ une application différentiable sur un ouvert $U \subset E$. Si $U$ est **convexe** et si il existe $k \geq 0$ tel que $|||\mathrm{d}f(a)||| \leq k$ pour tout $a \in U$, alors l'application $f$ est $k$-lipschitzienne sur $U$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in U, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe du théorème précédent. En effet, si $x, y \in U$, alors

$$[x,y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subset U$$

car $U$ est convexe. On pose alors $\gamma : t \in [0,1] \mapsto tx + (1-t)y \in E$ et $g : t \in [0,1] \mapsto f(\gamma(t)) \in F$. L'application $g$ est différentiable sur $[0,1]$ par composition, et on a pour tout $c \in [0,1]$ :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}g(c)(h) = \mathrm{d}f(\gamma(c)) \circ \mathrm{d}\gamma(c)(h) = \mathrm{d}f(\gamma(c))(h(x-y)).$$

Le théorème précédent appliqué à $g$ donne alors (on rappelle que $g'(c) = \mathrm{d}g(c)(1)$) :

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|_F &= \|g(1) - g(0)\|_F \\ &\leq \sup\left\{\|g'(c)\|_F \mid c \in ]0,1[\right\} \\ &= \sup\left\{\|\mathrm{d}f(\gamma(c))(x-y)\|_F \mid c \in ]0,1[\right\}. \\ &\leq \sup\left\{|||\mathrm{d}f(\gamma(c))||| \|x-y\|_E \mid c \in ]0,1[\right\} \\ &\leq k\|x-y\|_E.\end{aligned}$$

□

## 3 Applications

La première conséquence de l'inégalité des accroissements finis est la généralisation de "si $f' = 0$ sur $]a,b[$, alors $f$ est constante sur $]a,b[$".

**Corollaire 5.11:** ♥

Soient $E$ et $F$ des espaces normés et $f : U \to F$ une application différentiable sur un ouvert $U \subset E$. Si $U$ est **connexe** et si $\mathrm{d}f(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors $f$ est constante sur $U$.

*Démonstration.* Soient $x_0 \in U$ et $C := \{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\} = f^{-1}(\{f(x_0)\})$. Il est clair que $C$ est un fermé de $U$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. D'un autre côté, si $x \in C$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r) \subset U$. Or, $\mathrm{B}(x,r)$ est un ensemble convexe donc, d'après le théorème précédent, si $y \in \mathrm{B}(x,r)$ alors

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq 0\|x-y\|_E = 0.$$

Ainsi $f(y) = f(x)$, ce qui démontre que $\mathrm{B}(x,r) \subset C$ et donc que $C$ est un ouvert. Or $U$ est connexe, donc les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans $U$ sont $\emptyset$ et $U$. Or, $C \neq \emptyset$ car $x_0 \in C$, donc $C = U$ et $f$ est constante. □

En dimension finie, nous obtenons également le résultat suivant :

**Corollaire 5.12:** ♥

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $F$ un espace vectoriel normé et $f : U \to F$. Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ alors $f$ est lipschitzienne sur toute boule fermée $\overline{B} \subset U$.

*Démonstration.* Puis $\overline{B}$ est un fermé borné en dimension finie, il s'agit d'une partie compacte. Par continuité de la différentielle, $\mathrm{d}f$ est bornée sur $\overline{B}$ : $\exists M > 0$, $\forall x \in \overline{B}$, $|||\mathrm{d}f(x)||| \leq M$. De plus, la boule $\overline{B}$ est également convexe, donc il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis pour en déduire que $f$ est $M$-lipschitzienne. □

La troisième conséquence que nous allons présenter est aussi en dimension finie, il s'agit d'un résultat que vous connaissez déjà.

**Corollaire 5.13: Caractérisation des applications de classe $\mathcal{C}^1$.**

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. Alors toutes les dérivées partielles de $f$ existent et sont continues sur $U$ si et seulement si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.

*Démonstration.* Commençons par le sens le plus facile : " $\Longleftarrow$ ". On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On rappelle que nous avons la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \mathrm{d}f(x)(e_i),$$

où $x \in U$ et $e_i$ est le $i$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Or, l'application $\delta_{e_i} : L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mapsto L(e_i)$ est linéaire et continue. En effet, la linéarité est facile à vérifier, et on a clairement

$$\|\delta_{e_i}(L)\|_{\mathbb{R}^m} = \|L(e_i)\|_{\mathbb{R}^m} \leq |||L||| \|e_i\|_{\mathbb{R}^n}.$$

On peut écrire $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \delta_{e_i} \circ \mathrm{d}f$, qui est alors continue sur $U$ par composition d'applications continues.

Passons maintenant au sens " $\Longrightarrow$ ". Pour simplifier les estimations, on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de la norme $\|\cdot\|_1$ (sans perte de généralités puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes). Soit $a \in U$. Montrons que $f$ est différentiable en $a$. Nous connaissons le candidat pour la différentielle :

$$L : h \in \mathbb{R}^n \mapsto h_i \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^m.$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\frac{1}{\|h\|_1}(f(a+h) - f(a) - L(h)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note

- $u_j = h_j e_j = (0, \ldots, 0, h_j, 0 \ldots, 0)$ ;
- $z_j = (a_1 + h_1, \ldots, a_{j-1} + h_{j-1}, a_j, \ldots, a_n)$ ;
- $z_{n+1} = a + h$.

Un calcul direct (somme télescopique) montre que

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^n f(z_{j+1}) - f(z_j) = \sum_{j=1}^n f(z_j + u_j) - f(z_j).$$

On a alors par inégalité triangulaire

$$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\| \leq \sum_{j=1}^n \left\| f(z_j + u_j) - f(z_j) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j) \right\|_1 + \|h\|_1 \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\|_1$$

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on pose $g_j : t \in [0,1] \mapsto f(z_j + tu_j) - f(z_j)$. Puisque $f$ admet des dérivés partielles sur $U$, on en déduit que $g_j$ est dérivable sur $[0,1]$. En effet, si $t_0 \in [0,1]$ alors

$$\begin{aligned}
\frac{g_j(t+t_0) - g_j(t_0)}{t} &= \frac{f(z_j + (t+t_0)u_j) - f(z_j + t_0 u_j)}{t} = \frac{f(z_j + t_0 u_j + t u_j) - f(z_j + t_0 u_j)}{t} \\
&= \frac{f(z_j + t_0 u_j + t h_j e_j) - f(z_j + t_0 u_j)}{t h_j} \cdot h_j \\
&\underset{t \to 0}{\longrightarrow} h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j + t_0 u_j).
\end{aligned}$$

Par somme, si on pose $\varphi_j : t \in [0,1] \mapsto f(z_j + tu_j) - f(z_j) - th_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j)$, on a $\varphi_j$ dérivable sur $[0,1]$ avec

$$\varphi_j'(t) = h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j + tu_j) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis dans le cas des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^m$, i.e. Théorème 5.9, on obtient

$$\begin{aligned}\left\| f(z_j + u_j) - f(z_j) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j) \right\|_1 &= \|\varphi_j(1) - \varphi_j(0)\|_1 \leq \sup \left\{ \|\varphi_j'(t)\|_1 \mid t \in ]0,1[ \right\} \\ &\leq |h_j| \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j + tu_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j) \right\|_1 \mid t \in ]0,1[ \right\}\end{aligned}$$

Par continuité des dérivées partielles, il existe $r > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathrm{B}(a,r)$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \right\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2n}$. En particulier si $h \in \mathrm{B}(a,r)$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \left\| f(z_j + u_j) - f(z_j) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j) \right\| &\leq \sum_{j=1}^{n} |h_j| \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j + tu_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j) \right\|_1 \mid t \in ]0,1[ \right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |h_j| \frac{\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|_1.\end{aligned}$$

De même on a

$$\|h\|_1 \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|_1.$$

On vient de démontrer que pour tout $h \in \mathrm{B}(a,r)$, on a

$$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_1 \leq \varepsilon \|h\|_1.$$

Or, $\varepsilon > 0$ et arbitraire, on en déduit donc que $f$ est différentiable en $a$ avec $\mathrm{d}f(a) = L$.
Il reste à vérifier la continuité de $\mathrm{d}f$ sur $U$. Pour $a, b \in U$, et $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|\mathrm{d}f(a)(h) - \mathrm{d}f(b)(h)\|_1 \leq \|h\|_1 \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(b) \right\|_1.$$

Par conséquent

$$|\!|\!|\mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}f(b)|\!|\!| \leq \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(b) \right\|_1,$$

et ainsi la continuité de $\mathrm{d}f$ est une conséquence directe de la continuité des dérivées partielles.
□