Projet PEPS JCJC Insmi

Dynamique linéaire et non-linéaire via les espaces Lipschitz-libres

Arafat Abbar*[1], Clément Coine†[2], and Colin Petitjean‡[1]

[1]Université Gustave Eiffel, Champs-sur-Marne, France
[2]Université Caen Normandie, Caen, France

Ce projet est proposé par Clément Coine (membre porteur), Arafat Abbar et Colin Petitjean. Il porte sur l'étude de la dynamique d'une certaine classe d'opérateurs bornés appelés opérateurs lipschitziens. Il a pour objectif d'établir un pont entre les propriétés dynamiques de tels opérateurs (linéaires) et de leurs fonctions lipschitziennes (non linéaires) associées. Cette étude est à ce jour encore largement inexplorée. Ce projet constitue en outre une continuation d'une collaboration initiée entre ses trois membres fin 2019 et qui a abouti, fin 2020, à la soumission d'un premier article.

1 Projet scientifique

Un système dynamique topologique est un couple (M, f) où M est un espace métrique et $f : M \to M$ est une application continue. On définit de même un système dynamique linéaire par la donnée d'un opérateur linéaire bornée sur un espace de Banach. On considère alors, pour $x \in M$, l'orbite de x définie par $\text{Orb}(x, f) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$. Lorsque cette orbite est dense dans M, on dit alors que x est un point hypercyclique de f. Dans le cas d'un système dynamique linéaire, on dit que x est un vecteur hypercyclique, et lorsque $\text{Vect}(\text{Orb}(x, f))$ est dense, on dit que x est un vecteur cyclique. L'étude des opérateurs linéaires bornés hypercycliques (respectivement cycliques), c'est-à-dire possédant un vecteur hypercyclique (resp. cyclique) a été au coeur de nombreuses recherches ces 30 dernières années. Celles-ci sont, entre autres, motivées par la recherche d'une solution à un problème de longue haleine appelé problème du sous-espace invariant. Ce dernier pose la question de savoir si un opérateur linéaire T donné sur un espace de Banach réflexif et séparable X possède, ou non, un sous-ensemble fermé stable. Il se trouve que $\overline{\text{Orb}(x, T)}$ est le plus petit sous-ensemble fermé stable par T contenant $x \in X$. Ainsi, T ne possède pas de sous-ensemble fermé stable non trivial si et seulement si tout vecteur x non nul est hypercyclique. De même, T ne possède pas de sous-espace fermé stable non trivial si et seulement si tout vecteur x non nul est cyclique. Lorsque l'espace X n'est pas réflexif, des contre-exemples ont été donnés, notamment par C. Read [5] qui a construit un opérateur sur ℓ^1 dont l'orbite de tout vecteur non nul est dense. Cette construction est particulièrement technique, de même que démontrer qu'un opérateur donné est hypercyclique est une question généralement très difficile. La thèse de Kitai [3] a cependant permis d'introduire un critère simple pour vérifier qu'un opérateur a cette propriété. En réalité, la plupart des exemples connus d'opérateurs hypercyliques vérifient ce critère, qui est strictement plus fort que la notion même d'hypercyclicité.

Ces recherches ont naturellement fait émerger d'autres notions de dynamique, certaines plus faibles que l'hypercyclicité telles que la supercyclicité ou la cyclicité, d'autres plus fortes comme la notion d'applications mélangeantes ou d'hypercyclicité fréquente qui trouve ses origines dans la Théorie Ergodique. Ce domaine de recherche est encore très actif et de nombreuses questions restent en suspens.

*arafat.abbar@u-pem.fr
†clement.coine@unicaen.fr
‡colin.petitjean@univ-eiffel.fr

Il a été observé que certains des résultats classiques pour les systèmes dynamiques linéaires ne sont pas vrais en général pour les systèmes non linéaires et à ce jour, peu de liens ont été faits entre ces deux mondes. Une piste naturelle pour faire le pont entre les dynamiques linéaire et non linéaire est de comparer les propriétés dynamiques d'une fonction f et de son linéarisé noté $\widehat{f}$. Pour définir $\widehat{f}$, on fait appel à la notion d'espaces Lipschitz-libres. Pour un espace métrique M et un point $x_0 \in M$ fixé, on construit un espace de Banach $\mathcal{F}(M)$ de la façon suivante. On note $\mathrm{Lip}_0(M) = \{f : M \to \mathbb{C}$ lipschitzienne, $f(x_0) = 0\}$, muni de la norme qui à une fonction f associe sa meilleure constante de Lipschitz $Lip(f)$, et on définit, pour $x \in M$, $\delta(x) : \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(x)$. L'espace Lipschitz-libre sur M est alors défini par $\mathcal{F}(M) = \overline{\mathrm{Vect}\{\delta(x), x \in M\}} \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$. De cette construction naît la propriété fondamentale suivante : à toute $f : M \to M$ lipschitzienne, on peut associer un unique opérateur linéaire bornée $\widehat{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ tel que $\|\widehat{f}\| = Lip(f)$ et pour tout $x \in M$, $\widehat{f}(\delta(x)) = \delta(f(x))$. C'est la raison pour laquelle $\widehat{f}$ est appelé le linéarisé de f.

Les espaces Lipschitz-libres sont naturellement à l'intersection de la géométrie métrique et de l'analyse fonctionnelle. Ils sont également également connus et étudiés sous d'autres noms dans d'autres branches des mathématiques. Par exemple, grâce au Théorème de dualité de Kantorovich-Rubinstein, la norme sur $\mathcal{F}(M)$ peut être interprétée comme le coût d'une solution d'un certain problème de transport optimal. Dans la théorie des espaces de Banach, l'étude des espaces libres a permis de démontrer d'importants résultats en géométrie non linéaire [2] mais aussi de construire des contre-exemples. Leur propriété de linéarisation (passage d'une application f à son linéarisé $\widehat{f}$) a naturellement soulevé des questions en lien avec les notions de dynamique introduites précédemment. En effet, si une fonction lipschitzienne $f : M \to M$ vérifie une certaine propriété dynamique, que peut-on dire des propriétés satisfaites par $\widehat{f}$, et inversement ? On notera que $\mathcal{F}(M)$ coïncide parfois avec certains espaces usuels. En effet, lorsque $M = \mathbb{N}$, on montre que $\mathcal{F}(M) = \ell^1$ et lorsque $M \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, $\mathcal{F}(M)$ n'est autre que l'espace $L^1(M)$ relatif à la mesure de Lebesgue. En outre, pour un bon choix de fonction f, le linéarisé $\widehat{f}$ peut être identifié avec les opérateurs usuels sur les espaces de suites, tels que l'opérateur de décalage.

Cette étude du lien entre dynamique d'une application lipschitzienne f et de son linéarisé $\widehat{f}$ est donc à la croisée de différents domaines des mathématiques. À notre connaissance, cette direction de recherche est pratiquement inexplorée. Les trois membres de ce projet ont initié une telle étude en se focalisant notamment sur la recherche d'exemples et de contre-exemples sur le passage du caractère hypercyclique entre une application et son linéarisé et sur une étude plus approfondie dans le cas où l'espace métrique est discret ou un segment de $\mathbb{R}$. Cette collaboration a abouti à l'écriture d'un article [1]. Dans ce dernier, il est plus précisément démontré que $f : M \to M$ a une image dense si et seulement si $\widehat{f} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ a une image dense ou encore que x est un vecteur hypercylique pour f si et seulement si $\delta(x)$ est un vecteur cyclique pour $\widehat{f}$. Cependant, les auteurs exhibent des exemples où f est hypercyclique mais $\widehat{f}$ ne l'est pas, et inversement. Ces exemples montrent que le linéarisé ne conserve pas, en général, la propriété dynamique. Cependant, lorsque l'espace métrique est un segment de $\mathbb{R}$ (ou un arbre réel compact), une réponse positive est donnée puisque dans ce cas toute application lipschitzienne hypercylique f a un linéarisé $\widehat{f}$ qui vérifie une propriété strictement plus forte que l'hypercyclicité. Les auteurs montrent également qu'un critère semblable à celui du critère de Kitai peut être défini sur une application lipschitzienne f et qui garantit l'hypercyclicité de $\widehat{f}$, ce qui s'avère, en pratique, commode à utiliser.

Ce projet a pour but la poursuite de ces travaux et aura notamment pour objectif de répondre aux nombreuses questions qu'il reste à étudier. Nous listons les principales.

Question $n^o 1$ **:** Un opérateur hypercyclique a diverses propriétés spectrales, notamment le fait que toute composante connexe de son spectre intersecte le cercle unité, ou le fait que le spectre ponctuel de son adjoint est vide. Il est donc naturel de chercher à déterminer le spectre d'un opérateur $\widehat{f}$ ou de son adjoint $(\widehat{f})^*$ qui n'est autre qu'un opérateur de composition, qui est un type d'opérateur très étudié.

Question n^o2 **:** Il existe diverses notions de dynamique qui ont un sens dans le cas linéaire ou non-linéaire. Au vu des résultats obtenus dans [1], il est légitime de penser que certaines de ces propriétés peuvent se conserver en passant d'une application à son linéarisé et inversement. Une notion très étudiée ces dernières années et citée précédemment est l'hypercyclicité fréquente. Que dire ainsi de la conservation de telles propriétés entre une application lipschitzienne et son linéarisé ?

Question n^o3 **:** Un résultat célèbre de Read [4] est la construction d'un contre-exemple au problème du sous-espace invariant sur l'espace ℓ^1, qui n'est autre que l'espace libre sur M pour M bien choisi. Peut-on alors construire un exemple d'opérateur $\widehat{f}$ sur ℓ_1 pour lequel tout vecteur non nul est cyclique ? La même question peut être posé sur $L^1(\mathbb{R})$. Mais également, existe-t-il un opérateur $\widehat{f}$ hypercyclique ne vérifiant pas le critère d'hypercyclicité ? D'après le travail établi dans [1], on peut ramener le problème de la construction d'un opérateur hypercyclique à celle d'une fonction lipschitzienne bien choisie et il est naturel de s'attendre à ce que de nouveaux résultats dans cette direction donnent naissance à des exemples d'un genre nouveau.

Références

[1] A. Abbar, C. Coine, C. Petitjean, *Hypercyclicity on Lipschitz free spaces*, preprint (2020), arxiv 2011.10800.

[2] G. Godefroy, N. Kalton, *Lipschitz-free spaces*, Studia Math. 159 (2003), 121-141.

[3] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1982. Thesis (Ph.D.)–University of Toronto (Canada).

[4] C.J. Read, *A solution to the invariant subspace problem*, Bull. London Math. Soc. 16 (1984), no. 4, 337–401.

[5] C. J. Read, *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators.*, Israel J. Math.(1988), 63 : 1–40.

2 Équipe scientifique

• **Clément Coine** est membre porteur de ce projet. Il est Maître de Conférences à l'université de Caen Normandie, au Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO), depuis septembre 2020.

Expérience dans le domaine scientifique. C.C. a soutenu sa thèse intitulée "Multiplicateurs de Schur linéaires et bilinéaires continus et applications à la théorie de la perturbation" en juin 2017 (sous la direction de Christian Le Merdy) à l'université Bourgogne Franche-Comté. Il a ensuite passé deux ans en Chine à l'université du Centre-Sud pour y poursuivre ses travaux de recherche en tant que postdoctorant, puis a été ATER à l'unversité Gustave Eiffel. Son domaine de recherche est principalement centré sur les espaces L_p non-commutatifs, et plus particulièrement sur des questions de différentiabilité des fonctions à valeurs opérateurs.

C.C. est membre de l'équipe GRAAL (Géométrie, Représentations, Algèbre, Analyse, Logique) au LMNO où il travaille sur le thème des algèbres d'opérateurs et groupes quantiques. Il présente régulièrement des exposés dans un groupe de travail dédié à ce domaine.

Liste de quelques publications

1. **C. Coine** (2020), *Complete boundedness of multiple operator integrals*, Canadian Mathematical Bulletin, 1-17. doi :10.4153/S0008439520000570.
2. **C. Coine** (2019), *Perturbation theory and higher order $\mathcal{S}^p$-differentiability of operator functions*, à paraître dans Revista Matemática Iberoamericana.
3. **C. Coine, C. Le Merdy, A. Skripka, F. Sukochev**, *Higher order $\mathcal{S}^2$-differentiability and application to Koplienko trace formula*, J. Funct. Anal. 276 (2019), no. 10, 3170–3204.
4. **C. Coine**, *Schur multipliers on $\mathcal{B}(L_p, L_q)$*, J. Operator Theory 79 (2018), no. 2, 301–326.
5. **C. Coine, C. Le Merdy, D. Potapov, F. Sukochev, A. Tomskova**, *Peller's problem concerning*

Koplienko-Neidhardt trace formulae : the unitary case, J. Funct. Anal. 271 (2016), no. 7, 1747–1763.
6. **C. Coine, C. Le Merdy, D. Potapov, F. Sukochev, A. Tomskova**, *Resolution of Peller's problem concerning Koplienko-Neidhardt trace formulae*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 113 (2016), no. 2, 113–139.

• **Arafat Abbar** est actuellement ATER (à temps plein) à l'Université Gustave Eiffel, au Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées.

Expérience dans le domaine scientifique. Arafat Abbar a effectué sa thèse en dynamique linéaire à l'Université Gustave Eiffel, sous la direction d'Evgueni Abakoumov et de Stéphane Charpentier, entre octobre 2017 et décembre 2020 (mois de la soutenance), et intitulée "Dynamique linéaire : ensembles hypercycliques, semigroupes d'opérateurs, translations sur les groupes". Il travaille depuis septembre 2020 comme attaché temporaire d'enseignement et de recherche (à temps plein) à l'Université Gustave Eiffel. Son domaine de recherche porte principalement sur la dynamique des opérateurs linéaires, plus précisément sur l'étude du comportement des opérateurs linéaires hypercycliques et supercyliques. Il s'intéresse également à la théorie des opérateurs en général, et à l'analyse complexe.

Liste de quelques publications
1. **A. Abbar, Y. Kuznetsova**, Γ-*supercyclicity of families of translates in weighted* L^p *spaces on locally compact groups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 495, no 1, (2021). https ://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124709
2. **A. Abbar, C. Coine, C. Petitjean**, *Hypercyclicity on Lipschitz free spaces*, preprint (2020), arxiv 2011.10800.
3. **A. Abbar**, Γ-*supercyclicity for strongly continuous semigroups*, Complex Analysis and Operator Theory, vol. 13, no 8, p. 3923-3942 (2019).
4. **A. Abbar**, Γ-*supercyclicity for bilateral shift operators and translation semigroups*, Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, vol. 129, no 4, p. 73-79 (2019).

• **Colin Petitjean** est Maître de conférence à l'Université Gustave Eiffel (Marne-la-Vallée) depuis septembre 2019. Page web : `http://cpetit13.perso.math.cnrs.fr/`

Expérience dans le domaine scientifique. Colin Petitjean a soutenu sa thèse à Besançon, "Quelques aspects de la géométrie des espaces Lipschitz-libres", en juin 2018 (sous la direction de Gilles Lancien et Antonín Procházka). Les travaux de recherche de C.P. portent majoritairement sur les relations entre la géométrie des espaces métriques et la géométrie linéaire des espaces Lipschitz-libres associés. Il s'intéresse également aux applications des espaces libres aux plongements non linéaires d'espaces métriques dans des espaces de Banach. Il travaille récemment avec les membres de ce projet sur des questions de dynamique linéaire en lien avec les espaces libres.

Ensuite, C.P. est membre d'un groupe de recherche à Marne-la-Vallée où il travaille avec des spécialistes de domaines assez variés, tels que : l'analyse en haute dimension, la théorie de la mesure, la théorie des probabilités, le transport optimal, etc. Il est également membre d'un projet ANR JCJC (FRII) porté par Antonín Procházka dont le but principal est d'étudier la structure linéaire des espaces Lipschitz-libres.

Liste de quelques publications
1. **R. Aliaga, C. Petitjean, A. Procházka**, *Embeddings of Lipschitz-free spaces into* ℓ_1, J. Funct. Anal. 280 (2021), no. 6, 108916.
2. **R. Aliaga, C. Noûs, C. Petitjean, A. Procházka**, *Compact reduction in Lipschitz free spaces*, preprint (2020), arxiv 2004.14250.
3. **R. Aliaga, E. Pernecká, C. Petitjean, A. Procházka**, *Supports in Lipschitz-free spaces and applications to extremal structure*, J. Math. Anal. Appl. 489 (2020) 124128.
4. **B. Braga, G. Lancien, C. Petitjean, A. Procházka**, *On Kalton's interlaced graphs and nonlinear embeddings into dual Banach spaces*, preprint (2019), arxiv:1909.12132.
5. **L. García-Lirola, C. Petitjean, A. Procházka, A. Rueda Zoca**, *Extremal structure and duality of Lipschitz free spaces*, Mediterr. J. Math. 15 (2018), no. 2, Art. 69, 23 pp.

6. **C. Petitjean**, *Lipschitz-free spaces and Schur properties*, J. Math. Anal. Appl. 453 (2017), 894–907.

3 Projet de budget

L'argent du projet sera dépensé pour des missions. Nous listons ci-dessous ces missions qui, en l'état, atteindront un budget total d'environ **3000 euros**, répartis de la façon suivante :

3.1 1 missions de 6 jours à Caen

• Hébergement : environ 350 euros pour une chambre pour 5 nuitées.
• Frais de restauration : environ 90 euros pour 5 jours.
• Train : 40 euros pour un aller-retour Paris-Caen.

Ainsi, une mission de A. Abbar et C. Petitjean d'une semaine à Caen, cela coûte environ **950 euros**.

3.2 1 mission de 11 jours à Champs-sur-Marne

• Hébergement : environ 900 euros pour une chambre pour 10 nuitées.
• Frais de restauration : environ 150 euros pour 11 jours.
• Train : 40 euros pour un aller-retour Caen-Paris + 40 euros d'aller-retour RER.

Ainsi, une mission de 11 jours de C. Coine à Paris revient à **1150 euros**.

3.3 3 missions à Besançon, Calais et Lille

Des missions de courte durée (2 jours) où 1 à 2 membres se déplacent, afin de présenter les travaux en cours et discuter avec des spécialistes des différentes questions étudiées. En effet, un certain nombre de chercheurs à Calais et Lille sont spécialisés en dynamique des opérateurs tandis qu'à Besançon, les espaces libres sont un sujet de recherche très présent.

Pour une telle mission pour une personne :
• Hébergement : en moyenne 70 euros pour une chambre pour 1 nuitée.
• Frais de restauration : environ 30 euros pour 2 jours.
• Train : 80 euros en moyenne pour un aller-retour depuis Paris.

Ainsi, une mission de 2 jours à Besançon, Calais ou Lille pour une personne revient à 180 euros. On peut donc estimer le coût de ces missions à **900** euros (3 missions de respectivement une, deux et deux personnes).

4 Avis du directeur d'unité